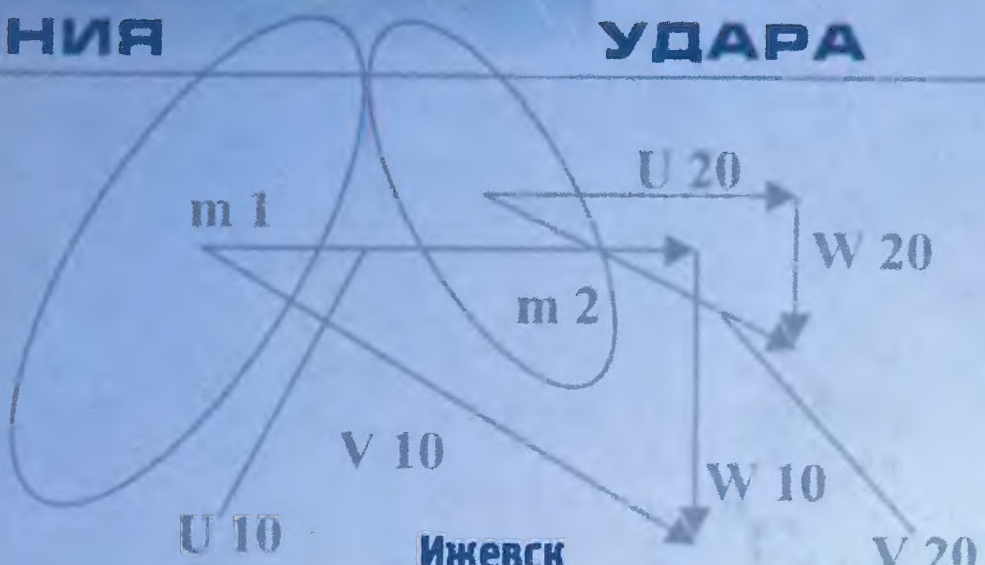
VISIT…

А.А. КОНОВАЛОВ

Удары в оружии



Ижевск
2001

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИЖЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Коновалов

УДАРЫ В ОРУЖИИ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
"Удмуртский университет"

Ижевск 2001

УДК 623.44
ББК 68.512.1
К 647

К 647 Коновалов А.А. Удары в оружии. Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 2001. 90 с.

ISBN 5-7029-0231-9

В книге излагается важнейший в проектировании стрелкового оружия раздел о соударениях деталей, являющихся основным процессом при обмене энергией в механизмах перезаряжания. Разобраны наиболее часто встречающиеся в практике случаи, некоторые задачи решены впервые

Книга предназначена для конструкторов-оружейников и студентов соответствующих специальностей.

ISBN 5-7029-0231-9 ББК 68.512.1

© А.А. Коновалов, 2001
© Издательский дом "Удмуртский университет", 2001

ПРЕДИСЛОВИЕ

Ударные механизмы применяются в автоматическом оружии. Имеется хорошо разработанная теория удара. Однако при решении конкретных задач, особенно в многомассовых системах, анализ сталкивается с существенными трудностями.

В представленной книге впервые в оружейной литературе показана возможность исследования удара на основании уравнений Лагранжа второго рода, что существенно облегчает анализ. Решен ряд практических задач, таких, как задача о противоотскоке, о начале открывания затвора, что представляет собой многомассовую систему.

Интерес представляют и исследования поведения системы соударяющихся тел при отклонении их параметров от теоретически оптимальных, поскольку при реальном проектировании к такому отклонению приходится прибегать постоянно.

Академик РАРАН,
доктор техн. наук, профессор В.П. Грязев

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Термины и определения

Под ударом понимается непосредственное взаимодействие упругих или упругопластических тел массами m_1 и m_2, движущихся первоначально со скоростями V_{10} и V_{20} по перекрещивающимся траекториям так, что в некоторый момент времени они приходят в соприкосновение. В результате упругого или упругопластического взаимодействия тела определенным образом обмениваются энергиями, а их векторы скоростей изменяют величину и направление. Этот обмен энергиями и изменения векторов скоростей являются предметом исследования удара с кинематических позиций. В более общем случае в ударе могут участвовать одновременно несколько масс. При исследовании удара предполагается, что реакции взаимодействия тел направлены перпендикулярно плоскости, проходящей по касательной к поверхностям обоих тел в точке их первоначального касания. При этом игнорируются особенности конфигурации тел вблизи точки первоначального касания. Линия, на которой лежат векторы контактных реакций, называется линией удара. В общем случае линия удара располагается достаточно произвольно относительно центров масс соударяющихся тел, но на расстояниях от центров масс, не превышающих их размеры. А векторы скоростей до и после удара располагаются достаточно произвольно относительно линии удара.

В частном случае линия удара и векторы скоростей лежат в одной плоскости, проходящей через центры масс соударяющихся тел. Такой удар называется плоским. Плоский удар, при котором линия удара проходит через центры масс соударяющихся тел, называется центральным.

Центральный удар, при котором векторы скоростей проходят через центры масс соударяющихся тел, называется прямым. В противном случае говорят о косом ударе.

1.2. О некоторых количественных соотношениях в процессе удара

Удар протекает во времени и пространстве, сопровождается развитием значительных контактных усилий и деформацией соударяющихся тел. В общем случае исследование этих процессов не поддается ни теоретическому, ни численному анализу. Затруднены и экспериментальные исследования, поскольку контактные напряжения в своем регистрируемом с достаточной точностью значении замкнуты в малых объемах. Поэтому количественные соотношения в них проследим на наиболее простом при-

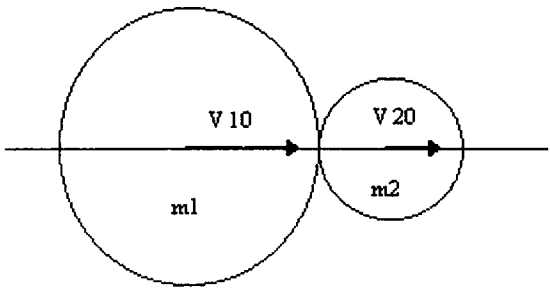


Рис 1. Прямой центральный удар

мере, а именно на соударении двух шаров (рис. 1). Исследования соударения шаров велись в начале века многими авторами на основе теории контактных напряжений Герца и дали следующие результаты.

Для контактного усилия:

$$Q = n\alpha^{\frac{3}{2}};$$

для величины сближения центров масс:

$$\alpha = \left(\frac{4}{5} \frac{V^2}{nn_1} \right)^{\frac{2}{5}};$$

для времени соударения:

$$t = 2{,}94\frac{\alpha}{V},$$

при

$$n = \frac{4}{3\pi\,(k_1 + k_2)}\sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

$$n_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2},$$

$$k_1 = \frac{1-\gamma_1^2}{\pi\, E_1},$$

$$k_2 = \frac{1-\gamma_2^2}{\pi\, E_2},$$

где E – модуль Юнга,

γ – модуль Пуассона,

R – радиусы шаров,

m – массы шаров,

V – скорость соударения.

В частном случае соударения двух одинаковых шаров ($R_1 = R_2$, $m_1 = m_2$) имеем:

$$n = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi\,(k_1 + k_2)}\sqrt{R}\ ;$$

$$n_1 = \frac{2}{m}\ ;$$

и далее

$$\alpha = \left(\frac{15\pi\,(k_1 + k_2)}{4\sqrt{2}}\,\frac{mV^2}{2\sqrt{R}}\right)^{0,4} = RV^{0,8}\left(\frac{5\pi^2(k_1 + k_2)}{3\sqrt{2}}\right)^{0,4}.$$

Наконец, если выберем в качестве материала шаров сталь ($E = 200$ ГРа, $\gamma = 1/3$, $\rho = 0{,}008$ кг/м^2) и примем радиусы шаров $R = 0{,}05$ м, а скорость соударения 5 м/с, то получим:

$\alpha = 0{,}443 * 10^{-3}$ м, $Q = 1{,}93 * 10^6$ Н, $t = 0{,}00026$ с.

Прокомментируем полученный результат. Прежде всего обратим внимание на большие значения сил и деформаций. Ясно, что произойдет сминание поверхности соударения. И действительно, поскольку $V = 5$ м/с не является предельной для деталей автоматики оружия, в местах соударения их мы замечаем площадки смятия. То есть первоначальный контакт из точечного стремится переродиться в плоский. С другой стороны, перемещения и время соударения малы настолько, что работой и импульсами сил внешнего трения или внешних упругих сил в периоде соударения можно пренебречь. Заметим также, что уменьшение первоначальной кривизны контактной площадки приводит к увеличению жесткости удара, еще большему возрастанию контактных сил и сокращению времени контакта. Итак, при кинематическом исследовании удара его можно считать мгновенным, из приложенных к соударяющимся телам сил учитывать только импульс контактных сил, вызывающий мгновенное изменение скоростей соударяющихся тел.

2. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР

2.1. Прямой удар

Пусть два тела массами m_1 и m_2 движутся до удара со скоростями V_{10} и V_{20} так, что векторы скоростей их лежат на линии, соединяющей их центры масс. При этом должно быть $V_{10} > V_{20}$, иначе соударение не произойдет (рис.1). Пусть линия удара также проходит через центры масс соударяющихся тел. То есть можно говорить о прямом ударе. Запишем уравнение сохранения количества движения, которое, как известно, справедливо при всех обстоятельствах:

$$m_1V_{10} + m_2V_{20} = m_1V_{11} - m_2V_{21}. \qquad (2.1.1)$$

В отдельных случаях последнее уравнение удобнее использовать в виде

$$m_1\Delta V_1 = m_2\Delta V_2, \qquad (2.1.1a)$$

где $\Delta V_1 = V_{10} - V_{11}, \Delta V_2 = V_{21} - V_{20}$.

Решим сначала задачу при условии, что потерь механической энергии при ударе не происходит. В этом случае можем записать уравнение сохранения механической энергии:

$$\frac{m\left(V_{10}^2 - V_{11}^2\right)}{2} = m_2\frac{\left(V_{21}^2 - V_{20}^2\right)}{2}. \qquad (2.1.2)$$

Разделив почленно последнее уравнение на уравнение (2.1.1а) и сократив двойки, получим:

$$\left(V_{10} + V_{11}\right) = \left(V_{21} + V_{20}\right). \qquad (2.1.3)$$

Решим уравнения (2.1.1) и (2.1.3) относительно скоростей после удара:

$$\left.\begin{aligned} V_{11}&=\frac{2m_2V_{20}+(m_1-m_2)V_{10}}{m_1+m_2}=V_{11}-\frac{2m_2}{m_1+m_2}(V_{10}-V_{20});\\ V_{21}&=\frac{2m_1V_{10}+(m_1-m_2)V_{20}}{m_1+m_2}=V_{20}+\frac{2m_1}{m_1+m_2}(V_{10}-V_{20}). \end{aligned}\right\} \quad (2.1.4)$$

Из этих зависимостей можно получить некоторую интересную информацию. Например, если $m_1 = m_2$, то $V_{11} = V_{20}$ и $V_{21} = V_{10}$, то есть тела просто обменялись скоростями. Этот результат можно проверить на бильярдном столе, поскольку потеря энергии при соударении шаров из слоновой кости и при малых скоростях минимальны. Если по неподвижному шару ударить другим шаром "в лоб", то ударяющий шар остановится, а ударяемый будет двигаться с той же, что и ударяющий до удара, скоростью и в том же направлении. Эксперимент удается и при соударении монеток на полированном столе. Изменение скоростей зависит только от относительной скорости тел до удара, что делает возможным изучать некоторые закономерности удара при $V_{20} = 0$.

В общем случае при соударении имеют место потери энергии, иногда значительные. Попробуем решить задачу традиционным для механики способом – через коэффициент полезного действия. При этом для простоты примем $V_{20} = 0$.

Имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m_1(V_{10}-V_{11})&=m_2V_{21};\\ m_1(\eta\ V_{10}^2-V_{11}^2)&=m_2V_{21}^2, \end{aligned}\right\}$$

где η – коэффициент полезного действия.

Система уже не поддается линеаризации путем деления второго уравнения на первое. Приходится решать нелинейную систему. Однако в данном случае это несложно. Получим:

$$V_{11}=\frac{V_0}{m_1+m_2}\left[m_1-\sqrt{\eta\ m_2^2+\left(\eta\ -1\right)/m_1m_2}\right].$$

При вполне реальных соотношениях $\eta_1 m_1$ и m_2 может получиться невещественное решение, что противоречит физике процесса. Можно полагать, что именно эта, по-видимому, неустранимая, сугубо математическая трудность вынудила Исаака Ньютона искать другой путь решения задачи, а именно – через введение понятия о коэффициенте восстановления скорости.

2.2. Понятие о коэффициенте восстановления скорости

Разобьем удар на два периода. Первый период от момента первоначального касания до момента, когда скорости центров масс соударяющихся тел становятся равными скорости V_c центра масс системы до удара и которая остается неизменной во время и после удара. Поскольку в этот период происходит сближение центров масс, сжатие тел, диссипативные силы и силы инерции препятствуют этому сближению, увеличивая контактные силы по сравнению с их значением в абсолютно упругом теле и без учета сил инерции.

Во втором периоде, когда центры масс начинают расходиться, до момента потери контакта между телами эти же силы вычитаются из упругих, снижая общую величину контактных реакций.

Поскольку уравнение (2.1.1) справедливо для любого момента времени, можем записать для периода сближения центров масс:

$$m_1\left(V_{10}-V_c\right)=m_2\left(V_c-V_{20}\right)=\int_{\Delta}^{t_c}Qdt=P_c,$$

и для периода расхождения центров масс:

$$m_1\left(V_c-V_{11}\right)=m_2\left(V_{11}-V_c\right)=\int_{t_c}^{t_k}Qdt=P_k,$$

где t_c – время сближения центров масс;
t_k – время контакта тел.

Согласно сказанному, $P_c > P_k$

Отношение импульса сил во время расхождения центров масс к импульсу сил во время их сближения называется коэффициентом восстановления скорости:

$$\beta = \frac{P_k}{P_c} = \frac{V_c - V_{11}}{V_{10} - V_c} = \frac{V_{21} - V_c}{V_c - V_{20}}.$$

Итак, имеем два линейных уравнения:

$$\beta(V_{10} - V_c) = V_c - V_{11},$$
$$\beta(V_c - V_{20}) = V_{21} - V_c.$$

Исключая из них V_c, получим:

$$\beta = \frac{V_{21} - V_{11}}{V_{10} - V_{20}}. \qquad (2.2.1)$$

Также можно записать равенство

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = (1+\beta)(V_{10} - V_{20}). \qquad (2.2.1а)$$

Ньютон определял коэффициент восстановления скорости, бросая стержни из различных металлов на тяжелую мраморную плиту, и сделал заключение, что указанный коэффициент зависит от материала соударяющихся тел. Более поздние исследования показали, что коэффициент восстановления скорости зависит от многих факторов, большинство из которых не удается описать в аналитической форме. Так что этот коэффициент в реальных расчетах приходится считать коэффициентом согласования с опытом. Имеющиеся экспериментальные данные дают значение коэффициента восстановления скорости $0{,}3 \le \beta \le 0{,}7$. Наблюда-

ются и большие отклонения от среднего значения. В предварительных расчетах будем принимать $\beta = 0{,}5$.

2.3. Прямой удар (продолжение)

Итак, после введения понятия о коэффициенте восстановления скорости имеем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m_1\Delta V_1 - m_2\Delta V_2 &= 0; \\ \Delta V_1 + \Delta V_2 &= (1+\beta)(V_{10} - V_{20}), \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \Delta V_1 &= \frac{-m_2(1+\beta)}{m_1+m_2}(V_{10}-V_{20}); \\ \Delta V_2 &= \frac{m_1(1+\beta)}{m_1+m_2}(V_{10}-V_{20}) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1.a)$$

или

$$\left.\begin{aligned} V_{11} &= V_{10} - \frac{m_2(1+\beta)}{m_1+m_2}(V_{10}-V_{20}); \\ V_{21} &= V_{20} + \frac{m_1(1+\beta)}{m_1+m_2}(V_{10}-V_{20}). \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1)$$

При $\beta = 1$ уравнения (2.3.1) обращаются в уравнения (2.1.4)

Для $V_{20} = 0$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} V_{11} &= \frac{m_1 - \beta\, m_2}{m_1 + m_2} V_{10}; \\ V_{21} &= \frac{(1+\beta) m_1}{m_1 + m_2} V_{10}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.2)$$

Замечаем, что в случае $\beta \neq 0$ скорость V_{11} также может обратиться в нуль, но уже при отношении $\frac{m_1}{m_2} = \beta$. Скорость второго тела при этом будет $V_{21} = \beta\, V_{10}$, то есть тела уже обмениваются скоростями не в полной мере. Этим обстоятельством можно воспользоваться при определении коэффициента восстановления в специально поставленных экспериментах.

2.4. Потери энергии при прямом ударе

Потери энергии определяются соотношением

$$\Delta э = \frac{m_1 \left(V_{10}^2 - V_{11}^2\right)}{2} + \frac{m_2 \left(V_{21}^2 - V_{20}^2\right)}{2}.$$

С учетом уравнений (2.1.1а), (2.2.1а) и (2.3.1а) это выражение можно переписать в виде

$$2\Delta э = m_1 \Delta V_1 \left(2V_{10} + \Delta V_1\right) - m_2 \Delta V_2 \left(2V_{20} + \Delta V_2\right) =$$
$$= \frac{m_1 m_2 (1+\beta)}{2(m_1 + m_2)} (V_{10} - V_{20}) \left[2(V_{10} - V_{20}) - (1+\beta)(V_{10} - V_{20})\right].$$

Окончательно имеем:

$$\Delta э = \frac{m_1 m_2 \left(1-\beta^2\right)}{2\left(m_1+m_2\right)}\left(V_{10}-V_{20}\right)^2. \qquad (2.4.1)$$

Это выражение еще раз подчеркивает, что процесс удара зависит только от относительной скорости соударяющихся тел. Поэтому рассмотрим некоторые частные случаи при $V_{20} = 0$. Выражение для общей потери энергии в этом случае запишется как

$$\Delta э = \frac{k\left(1-\beta^2\right)}{1+k} э_0, \qquad (2.4.2)$$

где $э_0 = \frac{m_1 V_0^2}{2}$ – начальная энергия удара, $k = \frac{m_2}{m_1}$.

Заметим, что потери энергии непрерывно увеличиваются с возрастанием k.

Но чаще всего нас интересуют не общие потери энергии, а "коэффициент полезного действия" ударного механизма, то есть отношение энергии, получаемой вторым телом, к начальной энергии первого. Имеем с учетом уравнения (2.3.2):

$$\frac{э_2}{э_0} = \frac{m_2 V_{21}^2}{2}\frac{2}{m_1 V_0^2} = \frac{m_1 m_2 \left(1-\beta\right)^2}{\left(m_1+m_2\right)^2} = \frac{k\left(1+\beta\right)^2}{\left(1+k\right)^2}. \qquad (2.4.3)$$

Определим, при каком значении $k = \frac{m_2}{m_1}$ КПД удара наибольший. Для этого функцию

$$f(k)=\frac{k}{(1+k)^2}$$

продифференцируем по k и результат приравняем к нулю:

$$\frac{d}{dk}\left(\frac{k}{(1+k)^2}\right)=\frac{1+k-2k}{(1+k)^3}=0,$$

откуда $k=1$.

Этот результат следует учитывать, например, при проектировании ударного воспламенительного механизма при поступательном движении курка (рис.2). Для уменьшения потерь энергии массы курка и ударника должны быть равны. Но и в этом случае КПД оказывается достаточно малым. При $\beta = 0{,}5$ КПД = 0,5625.

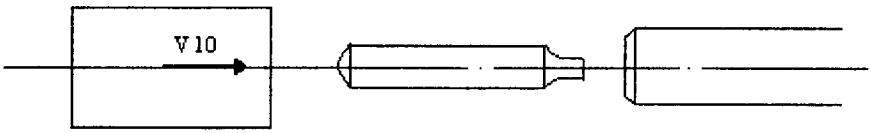


Рис 2. Курковый воспламенительный механизм

В реальном проекте почти всегда приходится отступать от идеальных рекомендаций. Поэтому полезно проследить, как меняется исследуемая функция вблизи точки экстремума. Для нашего случая составим таблицу:

k	0,5	0,75	1	1,5	2
$\frac{k}{(k+1)^2}$	0,222	0,245	0,250	0,240	0,222

Как видим, без особого ухудшения энергетического баланса ударного механизма можно отступать от идеального соотношения масс в довольно широких пределах.

2.5. Косой центральный удар

Пусть два тела соударяются так, что удар остается центральным, то есть контактные реакции лежат на линии, соединяющей центры масс тел, а векторы начальных скоростей не лежат на этой линии (рис.3). В этом случае задача решается так. Разложим векторы ско-

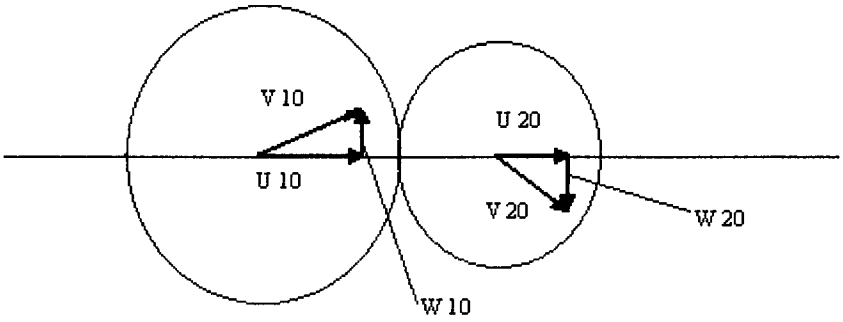


Рис 3. Косой центральный удар

ростей на составляющие u_1 и u_2, лежащие на линии взаимодействия (линии, соединяющие центры масс соударяющихся тел) и перпендикулярные ей w_1 и w_2. При отсутствии сил трения векторы w_1 и w_2 не изменят своего значения, а векторы u_1 и u_2 изменятся в соответствии с формулами прямого удара:

$$\left.\begin{aligned} u_{11} &= u_{10} - \frac{m_2(1+\beta)}{m_1+m_2}(u_{10}-u_{20}); \\ u_{21} &= u_{20} + \frac{m_1(1+\beta)}{m_1+m_2}(u_{10}-u_{20}). \end{aligned}\right\} \qquad (2.5.1)$$

Остается определить модули векторов после удара:

$$V_{11}=\sqrt{u_{11}^2+w_{10}^2},$$
$$V_{21}=\sqrt{u_{21}^2+w_{10}^2}$$

и их направление по отношению к линии взаимодействия:

$$tg\,\alpha_{11}=\frac{w_{10}}{u_{11}},$$
$$tg\,\alpha_{21}=\frac{w_{20}}{u_{21}}.$$

2.6. Повторный удар. Первый случай

Пусть два тела находятся в жесткой двусторонней связи, осуществляемой с некоторым зазором (рис. 4). После первого удара, согласно формуле (2.2.1), имеем:

$$V_{21}-V_{11}=\beta\,(V_{10}-V_{20}).$$

После второго удара:

$$V_{12}-V_{22}=\beta\,(V_{21}-V_{11})=\beta^2(V_{10}-V_{20}).$$

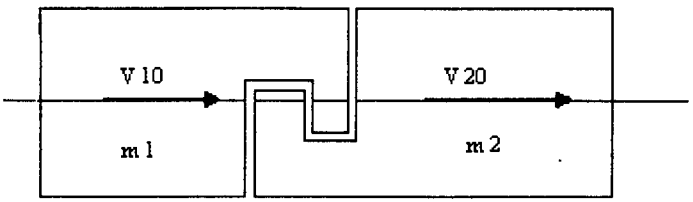


Рис 4. Повторный удар

Продолжая таким образом, получим:

$$V_{1n} - V_{2n} = (-1)^n \beta^{\,n} (V_{10} - V_{20}).$$

Поскольку при $\beta < 1$ $\beta^n_{n\to\infty} = 0$, то скорости в конце концов сближаются до равенства. То есть результат должен совпадать со случаем, когда $\beta = 0$. Имеем:

$$V_{1\infty} = V_{2\infty} = V_{10} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(V_{10} - V_{20}) = \frac{m_1 V_{10} + m_2 V_{20}}{m_1 + m_2},$$

что можно было бы получить непосредственно из уравнения (2.3.1), полагая $\beta = 0$.

Определим потери энергии. В *n*-м ударе потеря энергии:

$$\Delta э_n = \frac{m_1 m_2 (1-\beta^2)}{2(m_1 + m_2)}(V_{n1} - V_{n2}) = \frac{m_1 m_2 (1-\beta^2)}{2(m_1 + m_2)}\beta^{2(n-1)}(V_{10} - V_{20})^2.$$

Суммарная потеря энергии:

$$\Delta э = \sum_0^\infty \Delta э_n = \frac{m_1 m_2 (1-\beta^2)}{2(m_1 + m_2)}(V_{10} - V_{20})^2 \sum_1^\infty \beta^{2(n-1)}.$$

Но, согласно разложению в ряд Тейлора,

$$\sum_1^\infty \beta^{2(n-1)} = \frac{1}{1-\beta^2}.$$

То есть

$$\Delta э = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(V_{10} - V_{20})^2,$$

что также совпадает с уравнением (2.4.1) при $\beta = 0$.

2.7. Повторные удары. Второй случай

Пусть соударяются два таких тела, что $m_1 >> m_2$, но на второе тело действует сила сопротивления, быстро замедляющая его движение. В этом случае первое тело снова догонит второе и произойдет еще одно соударение, а затем все повторится сначала. Такая ситуация возникает, например, при ударе тяжелого курка по легкому ударнику, который сминает капсюль. Поскольку сила сопротивления движения второго тела в общем случае трудно поддается аналитическому описанию, то сделаем относительно ее предположение, что перед каждым последующим ударом она полностью останавливает второе тело. Естественно при этом считать, что и перед первым ударом второе тело неподвижно. После первого удара ударяющее тело будет иметь скорость $m_1 > \beta m_2$ (согласно 2.3.2):

$$V_1 = \frac{m_1 - \beta\ m_2}{m_1 + m_2} V_0.$$

После второго удара:

$$V_2 = \frac{m_1 - \beta\ m_2}{m_1 + m_2} V_1 = \left(\frac{m_1 - \beta\ m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 V_0.$$

Продолжая таким образом, получим после *n*-го удара:

$$V_n = \left(\frac{m_1 - \beta\ m_2}{m_1 + m_2} \right)^n V_0. \qquad (2.7.1)$$

Поскольку при любых сочетаниях параметров удара множитель

$$x = \left| \frac{m_1 - \beta\ m_2}{m_1 + m_2} \right| < 1,$$

то $x^n_{n\to\infty} \to 0$. То есть тела в конце концов останавливаются.

Необходимо проследить еще потери энергии в повторных (для рассматриваемого случая) ударах. В n-м ударе будем иметь (формула 2.7.1):

$$\Delta э_n = \frac{m_1 m_2 \left(1-\beta^2\right)}{2\left(m_1+m_2\right)} x^{2n} V_0^2.$$

Суммируя эти потери и обозначая $z = x^2$, имеем:

$$\Delta э = \frac{m_1 m_2 \left(1-\beta^2\right) V_0^2}{2\left(m_1+m_2\right)} \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Но, согласно формулам рядов Тейлора,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} = \frac{\left(m_1-\beta m_2\right)^2}{2m_1 m_2\left(1+\beta\right)+m_2^2\left(1-\beta^2\right)}.$$

Окончательно получим:

$$\Delta э = \frac{\left(m_1-\beta m_2\right)^2\left(1-\beta\ \right)}{\left(m_1+m_2\right)\left(2m_1+m_2\left(1-\beta\ \right)\right)} э_0. \qquad (2.7.2)$$

Пусть

$$m_2 = 0{,}1m_1,\ \beta = 0{,}5,$$

тогда

$$\Delta э = \frac{0{,}95^2 * 0{,}5}{1{,}1 * 2{,}05} э_0 = 0{,}200 э_0 .$$

Значение потерь на последовательное соударение получилось существенным. Оценим, однако, погрешность формулы (2.7.2). При $\beta = 0$ соударения тел должны закончиться на первом ударе, и далее тела будут двигаться как одно целое, расходуя энергию только на преодоление внешнего сопротивления. Потери энергии при единичном ударе в этом случае определятся по формуле (2.4.1):

$$\Delta э = \frac{0{,}1 * э_0}{2 * 1{,}1} = 0{,}045 э_0 .$$

Разница, как видим, существенная. Это говорит о том, что гипотеза о последовательных ударах первого тела по уже остановившемуся второму в общем случае неудовлетворительна. Однако для оценки верхнего возможного предела потерь на удары и соответственно с этим назначения запаса энергии для совершения работы вторым телом формула (2.7.2) может применяться. Тем более, что с возрастанием β ее ошибка, как можно полагать, уменьшается. Следует также иметь в виду, что энергия курка назначается с запасом и ход его ограничен, поэтому количество соударений его с ударником не будет бесконечным.

3. СОУДАРЕНИЯ МНОГОМАССОВЫХ СИСТЕМ

В предыдущих примерах в каждом отдельном соударении участвовали два тела. Однако могут быть случаи, когда нельзя разбить соударение многомассовой системы (или системы с многими степенями свободы) на отдельные единичные удары. Рассмотрим несколько примеров.

3.1. Последовательное соударение трех тел

Представим себе ситуацию, когда тело массой m_1, движущееся со скоростью $V_{10.}$ ударяет по телу массой m_2, движущемуся со скоростью V_{20} и находящемуся в момент удара в соприкосновении с телом m_3 ,

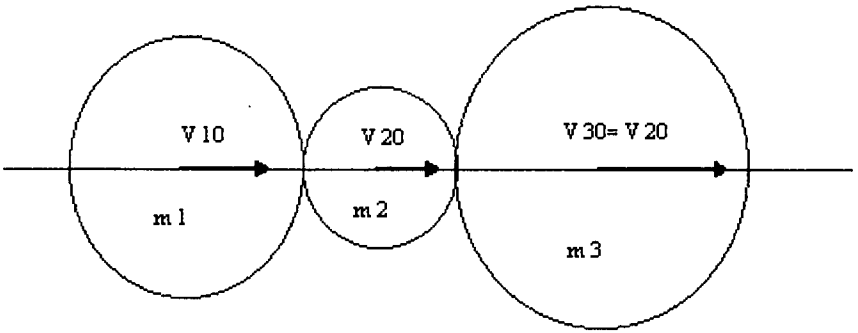


Рис 5. Последовательное соударение трех тел

движущимся со скоростью V_{30}. Совершенно очевидно, что добиться повторяемости опыта с тем, чтобы в момент удара все тела находились в соприкосновении, можно лишь в том случае, если $V_{20} = V_{30}$ (рис. 5).

Наблюдение за шарами на бильярдном столе (монетами на полированном столе) показывает, что если тела m_2 и m_3 неподвижны и находятся в соприкосновении, то при прямом ударе тела $m_1 (m_1 = m_2 = m_3)$ по телу m_2 первые два тела останавливаются, а третье тело получает скорость V_0 Это позволяет рассматривать процесс соударения трех тел, последовательно расположенных, как последовательный удар сначала первого по второму, а затем второго по первому. Понятно, что если $m_1 < \beta m_2$, а $m_2 < \beta m_3$, то процесс заканчивается после двух первых соударений. В противном случае может последовать вторая, третья и т.д. серия соударений.

После удара первого тела о второе скорости их распределятся согласно формулам (2.3.1):

$$V_{11} = V_{10} - \frac{m_2(1+\beta)}{m_1+m_2}(V_{10}-V_{20}),$$

$$V_{21}' = V_{20} + \frac{m_1(1+\beta)}{m_1+m_2}\left(V_{10}'-V_{20}\right).$$

Затем совершается удар второго тела по третьему:

$$V_{21}'' = V_{21}' - \frac{m_3(1+\beta)}{m_2+m_3}\left(V_{21}'-V_{20}\right),$$

$$V_{31} = V_{20} + \frac{m_2(1+\beta)}{m_2+m_3}\left(V_{21}'-V_{20}\right).$$

Продолжая подобным образом, получим для (n+1)-й серии соударений:

$$\left.\begin{aligned}
V_1(n+1) &= V_{1n} - \frac{m_2(1+\beta)}{m_1+m_2}(V_{1n}-V_{2n});\\
V_2'(n+1) &= V_{2n}'' + \frac{m_1(1+\beta)}{m_1+m_2}(V_{1n}-V_{2n});\\
V_2''(n+1) &= V_2'(n+1) - \frac{m_2(1+\beta)}{m_2+m_3}(V_{2(n+1)}-V_{3n});\\
V_3(n+1) &= V_{3n} + \frac{m_2(1+\beta)}{m_2+m_3}\left(V_{2(n+1)}'-V_{3n}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.1)$$

Например. Пусть $m_1 = 1/2\ m_2$, $m_3 = 2\ m_2$, $V_{10} = V_0$, $\beta = 0$, $V_{20} = 0$. В первой серии соударений:

$$V_{11} = \frac{1-0,5*0,5}{1,5} V_0 = 0,5V_0,$$

$$V_{21}' = \frac{1,5}{1,5} V_0 = V_0,$$

$$V_{21}'' = \frac{1-0,5*4}{5} V_0 = -0,2V_0,$$

$$V_{31} = \frac{1,5}{5} V_0 = 0,3V_0.$$

Во второй серии соударений:

$$V_{12} = 0,5V_0 - \frac{0,5*1,5}{1,5}(0,5+0,2) = 0,15V_0,$$

$$V_{22}' = -0,2V_0 + \frac{1,5}{1,5}(0,5+0,2) = 0,5V_0,$$

$$V_{22}'' = 0,5V_0 - \frac{2*1,5}{2,5}(0,5-0,3) = 0,26V_0,$$

$$V_{32} = 0,3V_0 + \frac{0,5*1,5}{2,5}(0,5-0,3) = 0,36V_0.$$

Скорости тел распределились так, что они больше не встретятся. При уменьшении массы m_2 по отношению к двум крайним количество серий соударений быстро растет. Поэтому попробуем решить задачу

приближенно, а именно при допущении, что скорость промежуточного тела после серии соударений равна среднему арифметическому скоростей крайних тел.

Имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &V_{20}=0;\\ &m_1\left(V_{10}-V_{11}\right)=m_2\left(V_{21}-V_{20}\right)+m_3\left(V_{31}-V_{20}\right);\\ &2V_{21}=V_{11}+V_{31};\\ &\beta\ \left(V_{10}-V_{20}\right)=V_{31}-V_{11}. \end{aligned}\right\}$$

Решив эти уравнения, получим:

$$\left.\begin{aligned} V_{11}&=\frac{m_1-\beta\ \left(m_3+0{,}5m_c\right)}{m_1+m_2+m_3}V_0;\\ V_{31}&=\frac{m_1\left(1+\beta\ \right)+0{,}5\beta\ m_2}{m_1+m_2+m_3}V_0;\\ V_{21}&=0{,}5\left(V_{11}+V_{31}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.2)$$

Прорешаем ранее решенный по формулам (2.7.1) пример еще и по формулам (3.1.2):

$$V_{11}=\frac{1-0{,}5(2+0{,}25)}{3{,}5}V_0=-0{,}036V_0;$$

$$V_{31}=\frac{1{,}5+0{,}125}{3{,}5}V_0=0{,}464V_0;$$

$$V_{21}=0{,}214\,V_0.$$

Расхождения значительные. Однако обращает на себя внимание большая, чем при расчетах по формулам (3.1.2), разница $V_{31}-V_{11}=0{,}5\,V_0$ вместо $V_{31}-V_{11}=0{,}21\,V_0$ по формулам (3.1.1) То есть для того, чтобы получить близкий к формулам (3.1.1) результат, мы должны принять в формулах (3.1.2) коэффициент восстановления скорости $\beta=0{,}21$.

Снова считаем:

$$V_{11}=\frac{1-0{,}21*2{,}25}{3{,}5}=0{,}1507V_0,$$

$$V_{31}=\frac{1{,}21+0{,}21*0{,}25}{3{,}5}=0{,}3607V_0,$$

$$V_{21}=0{,}256V_0.$$

Результаты практически совпадают. При расчетах по формулам (3.1.1) мы имеем четыре соударения тел, и в каждом соударении теряется кинетическая энергия. Эти потери складываются, что и приводит к необходимости формального уменьшения коэффициента в формулах (3.1.2), представляющего процесс как единичный удар. Вспомним, что при повторных соударениях жестко, через зазор, связанных тел получается $\beta=0$.

Поскольку коэффициент восстановления скорости трактуется как коэффициент согласования с опытом, который должен уточняться в любом случае, то формулы (3.1.1) и (3.1.2) можно считать идентичными по точности.

Но при этом следует иметь в виду, что в формулах (3.1.1) коэффициент β более стабилен; его некоторое изменение возможно только в связи с уменьшением относительной скорости соударения при каждом последовательном ударе.

В формулах (3.1.2) коэффициент восстановления зависит еще и от количества состоявшихся соударений, которое заранее определить нельзя.

С другой стороны, с уменьшением m_2 должен наступить момент, когда промежуточное тело будет просто зажато между двумя крайними и будет работать как упругое тело. В этом случае возможно даже увеличение β по сравнению с непосредственным единичным ударом двух тел. Этот вопрос заслуживает специального исследования, что выходит за пределы принятой здесь методики.

3.2. Параллельное соударение трех тел

Тело массой m_1 ударяет со скоростью V_0 по рычагу, с которым соприкасаются в момент удара массы m_2 и m_3, первоначально неподвижные (рис.6). Требуется определить скорости всех трех масс после удара.

Прежде всего запишем уравнения количества движения и момента количества движения относительно точки А:

$$\left.\begin{aligned} m_1(V_0 - V_1) &= m_2 V_2 - m_3 V_3; \\ a m_2 V_2 &= (a+b) m_3 V_3, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(а)}$$

где V_i – скорости тел после удара,

a и b – соответствующие плечи рычага.

Использование в качестве третьего уравнения для коэффициента восстановления скорости затруднено следующими обстоятельствами:

1) удар происходит сразу в трех точках рычага, и коэффициенты восстановления должны быть в каждой точке свои;

2) неясно, как распределятся начальные скорости рычага перед ударом.

Первое затруднение может быть преодолено за счет допущения, что коэффициенты восстановления во всех трех точках одинаковы. Это допущение тем более правомерно, что коэффициент восстановления есть коэффициент согласования с опытом, окончательное значение которого, в данном случае среднего для всех трех точек, определится в результате соответствующего эксперимента.

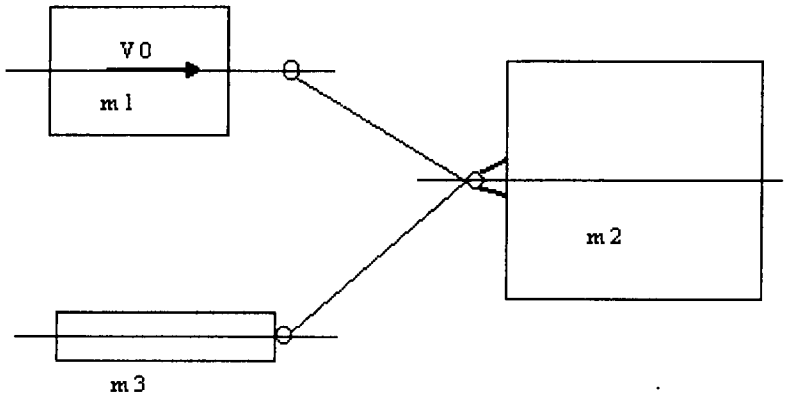


Рис 6. Параллельное соударение трех тел

Найти логическое разрешение второго препятствия не удалось, поэтому решим задачу только для случая упругого удара. Тогда можем записать уравнение сохранения механической энергии:

$$m_1\left(V_0{}^2 - V^2{}_1\right) = m_2 V_2{}^2 - m_3 V_3{}^2. \qquad (б)$$

Из второго уравнения (а) находим:

$$V_2 = \frac{a+b}{a}\,\frac{m_3}{m_2}\,V_3\,. \qquad (в)$$

Подставив это выражение в первое уравнение (а) и в (б), получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m_1\left(V_0 + V_1\right) &= \frac{b}{a} m_3 V_3; \\ m_1\left(V_0{}^2 - V_1^2\right) &= \left(1 + \frac{a+b}{a^2}\,\frac{m_3}{m_2}\right) m_3 V_3^2. \end{aligned}\right\} \qquad (г)$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, получим:

$$(V_0+V_1)=\frac{a}{b}\left(1+\frac{(a+b)^2}{a^2}\frac{m_3}{m_2}\right)V_3. \qquad (д)$$

Исключив из первого уравнения (г) и уравнения (д) скорость, а также присоединяя выражения для V_1 и V_2 из выражений (в) и (г) соответственно, получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned} V_3&=\frac{2V_0}{\frac{a}{b}\frac{m_3}{m_1}+\frac{a}{b}\left(1+\frac{(a+b)^2}{a^2}\frac{m_3}{m_2}\right)};\\ V_2&=\frac{a+b}{a}\frac{m_3}{m_2}V_3;\\ V_1&=V_0-\frac{a}{b}\frac{m_3}{m_1}V_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.1)$$

По аналогии с уравнениями (2.3.1) можно подставить в (3.2.1) вместо двойки β. Но более подробное исследование показывает, что в этом случае коэффициент восстановления существенным образом зависит от соотношения масс.

Эти выражения позволяют получить первое представление о распределении скоростей после удара, которое затем должно быть уточнено в процессе эксперимента.

Например. Пусть $m_2 = 4m_1$, $m_3 = 1/4m_1$, a = b .
Тогда

$$V_3 = \frac{2V_0}{0{,}25+(1+0{,}25)} = \frac{4}{3}V_0;$$

$$V_2 = 2\frac{V_0}{16}\frac{4}{3} = \frac{1}{6}V_0;$$

$$V_1 = V_0 - \frac{V_0}{4}\frac{4}{3} = \frac{2}{3}V_0.$$

3.3. Уравнения Лагранжа второго рода для случая удара

Если тела во время удара находятся в жесткой ненарушаемой связи, то к ним применимы уравнения Лагранжа второго рода с некоторыми упрощениями. Заметим, что к этому случаю относится пространственное соударение двух тел, где роль масс, наряду с действительной массой тела, выполняют моменты их инерции относительно трех осей поворота для каждого.

Поскольку мы условились не рассматривать работу внешних сил, приложенных к системе соударяющихся тел во время удара, то можно воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода для системы с голономными (не зависящими от обобщенных координат) связями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

где T – кинетическая энергия системы;

q_i – обобщенные координаты;

$\dot{q}_i$ – обобщенные скорости;

Q_i – обобщенные силы.

Проинтегрируем последнее уравнение по t:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)dt - \int_0^t \frac{\partial T}{\partial q_i}\,dt = \int_0^t Q_i dt.$$

В силу кратности удара второй член в левой части равен нулю. Первый член получает конечное приращение за счет конечного изменения скоростей при ударе. Выражение в правой части представляет собой импульс контактных сил. Таким образом, имеем систему уравнений движения при ударе

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = P, \tag{3.3.1}$$

где P – импульс контактных сил.

Если две соударяющиеся системы после удара не вступают в жесткую двустороннюю связь, то снова приходится прибегать к понятию коэффициента восстановления скоростей, который будет относиться к проекциям скоростей соударяющихся масс на линию удара и к приведенным к линии удара массам.

3.4. Косой удар. Общий случай

В части пункта 2.5 мы рассмотрели центральный косой удар, то есть когда линия удара проходит через центры масс соударяющихся тел. В общем случае линия удара не проходит через центры масс (рис. 7). Ограничимся в данном пункте плоским ударом. Кроме того, учтем силы трения по площади контакта, импульс которых P_f связан с импульсом контактных сил соотношением

$$P_f = fP \ (\alpha_i \neq 0), \tag{3.4.1}$$

где f – динамический коэффициент трения.

Разложим, как и в пункте 2.5, скорость i-го тела V_i (i=1,2) на две составляющих: проекцию скорости на линию удара $u_i = V_i \cos\alpha_i$ и проекцию на площадку контакта $w_i = V_i \sin\alpha_i$, где α_i – угол между линией

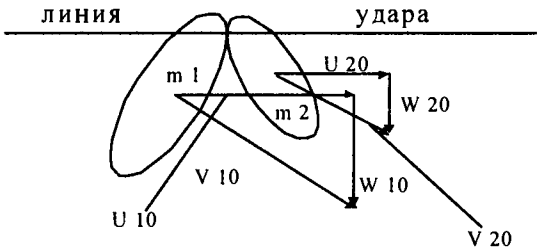


Рис 7. Косой удар

удара и вектором скорости. Тогда выражение для кинетической энергии i-го тела примет вид

$$2T_i = m_i\left(u_i^2 + w_i^2 + \rho_i^2\omega_i\right),$$

где ω_i – угловая скорость i-го тела,

ρ_i – собственный радиус инерции данного тела.

В качестве обобщенных координат назначим перемещение точки первоначального контакта A вдоль линии удара x_{Ai}, вдоль площадки контакта y_{Ai} и угол поворота φ_i тел относительно точки A так, что

$$\dot{x}_{Ai} = u_{Ai},\ \dot{y}_{Ai} = w_{Ai},\ \dot{\varphi}_{Ai} = \omega_{Ai};$$

обобщенные скорости связаны с составляющими скоростей центра масс зависимостями:

$$u_i = u_{Ai} - \omega_i a_i,\ w_i = w_{Ai} - \omega_i b_i,\ \omega_{Ai} = \omega_i; \qquad (3.4.2)$$

где a_i – расстояние от центра масс i-го тела до линии удара,

b_i – расстояние от центра масс до линии, проходящей через площадку контакта.

С учетом последних равенств выражение для кинетической энергии (б) перепишется:

$$2T_i = m_i\left[\left(u_{Ai} - \omega_i a_i\right)^2 + \left(w_{Ai} - \omega_i b_i\right)^2 + \rho_i^2 \omega_i^2\right].$$

При этом уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\Delta\frac{\partial T_i}{\partial u_{Ai}} = m_i\Delta\left(u_{Ai} - \omega_i a\right) = m_i\Delta u_i = -P;$$

$$\Delta\frac{\partial T_i}{\partial w_{Ai}} = m_i\Delta\left(w_{Ai} - \omega_i b\right) = m_i\Delta w_i = -fP;$$

$$\Delta\frac{\partial T_i}{\partial \omega_i} = m_i\Delta\left[-a_i\left(u_{Ai} - a_i\,\omega_i\right) - b\left(w_{Ai} - b_i\omega_i\right) + \rho_i^2\omega_i\right] = 0.$$

Присоединив к уравнениям движения выражение для коэффициента восстановления скорости

$$\Delta u_{A1} + \Delta u_{A2} = \left(1+\beta\right)\left(u_{A10} - u_{A20}\right),$$

где

$$u_{A10} = u_{10} + a_1\omega_{10}\,;\quad u_{A20} = u_{20} + a_2\omega_{20},$$
$$\Delta u_{A1} = u_{A10} - u_{A11},\quad \Delta u_{A2} = u_{A21} - u_{A20}.$$

Получим замкнутую систему уравнений, которую, исключая из нее импульс ρ и с учетом уравнения (3.4.1), запишем:

$$\left.\begin{aligned} & m_1\Delta\left(u_{A1}-a_1\omega_1\right)=m_2\Delta\left(u_{A2}-a_2\omega_2\right); \\ & \Delta u_{A1}+\Delta u_{A2}=\left(1+\beta\right)\left(u_{A10}-u_{A20}\right); \\ & \Delta w_{Ai}=f\ \Delta u_i; \\ & \Delta\omega_i=\frac{a_i+b_i f\Delta u_{Ai}}{a_i^2+b_i^2+\rho_i^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.3)$$

Система легко решается, но достаточно громоздка для дальнейших аналитических преобразований, поэтому исследуем ее поведение на нескольких частных случаях.

3.5. Соударение шаров с учетом трения по площадке контакта

Удар шаров всегда центральный, поэтому $a_i = 0$, $b_i = r_i$, где r_i – радиусы шаров.

В этом случае $u_{Ai} = u_i$ и система легко решается:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta u_1 &= u_{10} - u_{11} = \frac{m_2(1+\beta)}{m_1+m_2}(u_{10}-u_{20});\\
\Delta u_2 &= u_{20} - u_{21} = -\frac{m_1(1+\beta)}{m_1+m_2}(u_{10}-u_{20});\\
\Delta w_1 &= w_{10} - w_{11} = f\Delta u_1;\\
\Delta w_2 &= w_{20} - w_{21} = f\Delta u_2;\\
\Delta\omega_1 &= \omega_{10} - \omega_{11} = \frac{2r_1\Delta u_1}{\rho_1^2+r_2^2};\\
\Delta\omega_2 &= \omega_{20} - \omega_{21} = \frac{2r_2\Delta u_2}{\rho_2^2+r_2^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.5.1)$$

Пусть $V_{10} = V_0$, $V_{20} = 0$, $\omega_{i0} = 0$. Пусть также шары одинаковы, то есть $r_1 = r$, $m_1 = m_2$.

С учетом того, что для шара $\rho^2 = 0{,}4r^2$, получим:

$$\begin{aligned}
u_{11} &= u_{10} - 0{,}5(1+\beta)u_{10};\\
u_{21} &= 0{,}5(1+\beta)u_{10};\\
w_{11} &= 0{,}5f(1+\beta)u_{10};\\
w_{21} &= 0{,}5f(1+\beta)u_{10};\\
r\omega_{i1} &= 0{,}714(1+\beta)u_{10}.
\end{aligned}$$

Угол между линией удара и направлением скорости второго тела после удара:

$$\alpha_{21} = \text{arctg}\frac{w_{21}}{u_{21}} = \text{arctg}\ f \approx f\ .$$

Даже если предположить, что при ударе бильярдных шаров коэффициент трения на порядок меньше, чем принимаются в машиностроении для пары сталь по стали, то есть равен $f = 0{,}01$, то отклонение от линии удара с расстояния в 0,5 м составит 5 мм, что вполне достаточно, чтобы шар не вошел в лузу. Очевидно, что опытные игроки в состоянии учитывать столь тонкий эффект. Формулы (3.5.1) позволяют сделать еще одно интересное наблюдение. Замечаем прежде всего, что угловые скорости шаров прямо пропорциональны коэффициенту трения. А тангенс угла между направлением скорости первого тела после удара и линией удара определится отношением

$$tg\alpha_1 = \frac{w_{11}}{u_{11}} = -f\frac{1+\beta}{1-\beta}\ .$$

Направление линии удара проще всего определить по направлению движения второго тела, сделав поправку на угол трения. Заменим шары на шайбы одинакового диаметра. Массы их выровняем за счет толщины. Учтем также, что для шайбы $\rho^2 = 0{,}5r^2$. Сверху на шайбу нанесем крестообразные диски. Осуществляя соударение шайб из разных материалов на скользкой поверхности, фиксируя углы векторов скоростей и угловые скорости шайб после удара, например, с помощью скоростной кинокамеры, получим данные для вычислений f и β.

3.6. Внецентренный удар двух кубов

Пусть два куба со сторонами $l_1 = 2a$ и $l_2 = 4a$ движутся со скоростями V_{10} и V_{20} ($V_{10} > V_{20}$) по параллельным направляющим. И пусть линия центров масс также параллельна направляющим. Один из кубов

имеет ребро, смещающее линию удара на расстояние b от линии центров масс (рис.8). Кинетическая энергия куба запишется как

$$T = \frac{m}{2}\left(V^2 + \rho^2\omega^2\right),$$

где m – масса куба;
V – скорость его центра масс;
ω – угловая скорость;
ρ – радиус инерции куба.

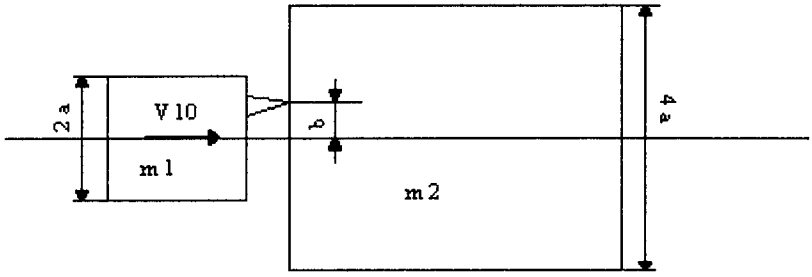


Рис 8. Удар двух кубов

Скорость центра масс связана со скоростью в точке удара A соотношением

$$V = V_a - b\omega \ .$$

Следовательно, можем записать:

$$T = \frac{m}{2}\left(\left(V_a - b\omega\right)^2 + \rho^2\omega^2\right).$$

Принимая в качестве обобщенных координат величины V_a и ω, получим уравнения движения:

$$m\Delta\left(V_a - b\omega\right) = P\,,$$
$$-b\Delta\left(V_a - b\omega\right) + \rho^2\omega = 0.$$

Исключив из этих уравнений угловую скорость, приведем их к виду

$$m_{np}\Delta V_A = P,$$

где

$$m_{np} = m\frac{\rho^2}{b^2+\rho^2}.$$

Угловая скорость при этом определится как

$$\omega = \frac{b\Delta V_A}{b^2+\rho^2}\;;$$

Для куба со стороной C квадрат радиуса инерции равен

$$\rho^2 = \frac{c^2}{6}.$$

Тогда, с учетом соотношения заданных размеров, будем иметь для каждого куба:

$$m_{np1} = m_1\frac{2a^2}{3b^2+2a^2},$$
$$m_{np2} = m_2\frac{8a^2}{3b+8a^2} = m_1\frac{64a^2}{3b^2+8a^2}.$$

Уравнения сохранения количества движения для приведенных масс запишется как

$$\frac{1}{3b^2+2a^2}\Delta V_{A1}=\frac{32}{3b^2+8a^2}\Delta V_{A2}.$$

Присовокупим к этому уравнению выражение для коэффициента восстановления скорости

$$\Delta V_{A2}-\Delta V_{A1}=(1+\beta)(V_{10}-V_{20}),$$

получим окончательно:

$$\left.\begin{aligned}\Delta V_{A1}&=-\frac{32(3b^2+2a^2)(1+\beta)}{99b^2+72a^2}(V_{10}-V_{20});\\ \Delta V_{A2}&=\frac{(3b^2+8a^2)(1+\beta)}{99b^2+72a^2}(V_{10}-V_{20}).\end{aligned}\right\} \qquad (3.6.1)$$

Пусть $b=a$, $\beta = 0{,}5$, $V_{20}=0$, $\omega_{10}=\omega_{20}=0$ тогда

$$V_{A1}=V_0-\frac{1{,}5*32*5a^2}{171a^2}V_0=-0{,}404V_0;$$

$$V_{A2}=\frac{1{,}5*11a^2}{171a^2}V_0=0{,}096V_0;$$

$$a\omega_1=\frac{3}{5}\Delta V_{A1}=-\frac{3}{5}1{,}404V_0=-0{,}842V_0;$$

$$a\omega=\frac{3}{11}\Delta V_{A2}=\frac{3}{11}0{,}096V_0=0{,}026V_0.$$

Скорости центров масс определятся как

$$V_{11} = V_0 + (\Delta V_{A1} - a\omega_1) = 0{,}438V_0;$$
$$V_{21} = \Delta V_{A2} - a\omega_2 = 0{,}070V_0.$$

Поскольку $V_{11} > V_{21}$, то после того, как угловые скорости затухнут при ударах по направляющим, произойдет новое соударение. И так далее до тех пор, пока скорости кубов сравняются. На этом эффекте построен самый действенный и простой механизм противоотскока. Так, рама затвора автомата Калашникова ударяет в муфту ствола левой, если смотреть по направлению стрельбы, щекой.

Представляет интерес еще и предельное значение плеча b, при котором механизм противоотскока еще действует. С этой целью выразим скорости центров масс в более общем виде:

$$V_{11} = V_0 + (\Delta V_{A1} - b\omega_1) = V_0 + \frac{\rho_1^2}{3b^2 + \rho_1^2}\Delta V_{A1} = V_0 - \frac{64(1+\beta)a^2}{99b^2 + 72a^2}V_0,$$
$$V_{21} = \Delta V_{A2} - b\omega_2 = \frac{8(1+\beta)a^2}{99b^2 + 72a^2}V_0.$$

Приравнивая эти скорости, при $\beta = 0{,}5$ получим $b^2 = 0{,}364a^2$ или $b = 0{,}603a$,

$$V_{11} = V_{21} = \frac{1{,}5*8a^2}{(99*0{,}364 + 72)a^2}V_0 = \frac{1}{9}V_0.$$

При меньших b отскок, пусть сильно ослабленный, будет происходить.

Определим еще скорости вращательного движения кубов:

$$a\omega_1 = \frac{ab\Delta V_{A1}}{b^2+\rho_1^2} = -\frac{0{,}603a^2*32\,(1+\beta)*3V_0}{(99*0{,}364+72)a^2} = 0{,}804V_0;$$

$$a\omega_2 = \frac{ab\Delta V_{A2}}{b^2+\rho_1^2} = -\frac{0{,}603a^2*3*(1+\beta)V_0}{(99*0{,}364+72)a^2} = 0{,}025V_0.$$

Сравним энергии поступательного и вращательного движения для второго тела:

$$T_{пост} = \frac{m_2V_{11}^2}{2} = \frac{m_2}{162}V_0^2 = 0{,}00617m_2V_0^2;$$

$$T_{вр} = \frac{m_2\rho_2^2\omega_1^2}{2} = 0{,}000417m_2V_0^2.$$

То есть в данном случае энергия вращения не превосходит 7% от энергии поступательного движения. Этим обстоятельством мы будем пользоваться, когда плечо импульса мало по сравнению с размером тела.

3.7. Ударный механизм с вращающимся курком

Пусть курок массой m_1 и собственным радиусом инерции ρ вращается вокруг оси O (рис.9), причем угловая скорость его перед соударением с ударником равна ω_0. Если расстояние от линии удара до центра масс курка обозначим через a, а расстояние от центра масс до оси вращения – через b, то начальная обобщенная скорость V_{A0} на линии удара

$$V_{A0} = (a+b)\omega_0.$$

Если точка A расположена достаточно близко от основания перпендикуляра a, то составляющей w можно пренебречь. Опираясь на резуль-

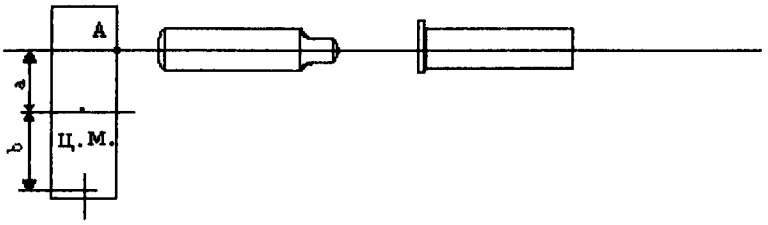


Рис 9. Ударный механизм

таты параграфа "Последовательное соударение трех тел", можем заключить, что при ударе по ударнику курок будет вести себя как свободное тело, и лишь затем удар при определенных обстоятельствах может передаться на ось. Таким образом, обобщенная скорость V_A выразится через скорость центра масс V_c и угловую скорость следующим образом:

$$V_{A1} = V_c + a\omega_1.$$

Решение уравнений (4.2.2) в этом случае:

$$\left.\begin{aligned} \Delta V_{A1} &= V_{A0} - V_{A1} = \frac{m_2(1+\beta)}{m_{np}+m_2} V_{A0}, \\ m_{np} &= \frac{\rho^2}{a^2+\rho^2} m_1, \\ V_2 &= \frac{m_{np}(1+\beta)}{m_{np}+m_2} V_{A0}, \\ \Delta\omega_1 &= \omega_0 - \omega_1 = -\frac{a\Delta V_{A1}}{a^2+\rho^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.7.1)$$

Представляют интерес следующие случаи. Определим, при каких обстоятельствах удар не будет передаваться на ось курка, что прежде всего имеет смысл с точки зрения экономии энергии. Скорость V_0 на оси выразится через скорость на линии удара и угловую скорость равенством

$$V_0 = V_{A1} - (a+b)\omega_1.$$

Совершенно очевидно, что $V_0 = \Delta V = 0$, если

$$\Delta V_{A1} - (a+b)\Delta\omega_1 = 0.$$

Подставляя в последнюю формулу значения из уравнений (3.7.1), получим:

$$\Delta V_{A1}\left(1 - \frac{(a+b)a}{a^2+\rho^2}\right) = 0,$$

отсюда

$$a = \frac{\rho^2}{b}. \qquad (3.7.2)$$

Представляет также интерес значение k, при котором КПД удара был бы наибольший. Энергия ударника запишется как

$$T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_2(1+\beta)^2(a+b)^2\omega_0^2}{2\left(1+\frac{m_2}{m_{np}}\right)^2}.$$

Раскроем зависимость $m_{пр}$ от а по формуле (3.7.2), а также выражая начальную кинетическую энергию из уравнений (3.7.1), получим:

$$T_2 = \frac{k(1+\beta)(a+b)^2}{\left(\rho^2 + k\left(\rho^2 + a^2\right)\right)^2} T_0,$$

где
$$k = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (3.7.3)$$

Таким образом, наивыгоднейшее с энергетической точки зрения значение k определится из условия максимума функции

$$f(k_1 a) = \frac{k}{\left(\rho^2 + k\left(\rho^2 + a^2\right)\right)^2}.$$

Приравнивая производную от $f(k_1 a)$ к нулю, получим после сокращений:

$$k = \frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}. \qquad (3.7.4)$$

Желательно, чтобы уравнения (3.7.2) и (3.7.4) выполнялись одновременно. При этом замечаем, что достаточно легко оперировать параметром k за счет массы ударника при заданных (из конструктивных соображений) параметрах курка m_1, ρ и b. Подставляя в (3.7.4) выражение для a из (3.7.2), получим:

$$k = \frac{b^2}{\rho^2 + b^2}. \qquad (3.7.5)$$

Чувствительность к отклонению параметров ударного механизма от найденных оптимальных зависит от конкретного его исполнения и должна исследоваться в каждом частном случае самостоятельно. Тем не

менее попробуем получить некоторые сведения о чувствительности к нарушению оптимумов на упрощенном примере.

Пусть курок представляет собой квадратную призму, поперечными размерами которой можно пренебречь при определении собственного радиуса инерции. Тогда, если длина курка равна l,квадрат его радиуса инерции $\rho^2 = \frac{l^2}{12}$. Примем еще $b = 0{,}4l$.

Для оптимального положения линии удара будем иметь:

$$a = \frac{\rho^2}{b} = \frac{l}{12*0{,}4} = 0{,}208\ l.$$

Для оптимального соотношения масс:

$$k = \frac{b^2}{\rho^2 + b^2} = \frac{0{,}16*12}{1+0{,}16*12} = 0{,}658.$$

Проиллюстрируем чувствительность КПД ударного механизма к отклонению его параметров от оптимальных. С этой целью сведем значение функции

$$f(a_1,k) = \frac{(a+b)^2 k}{\left(\rho^2 + k\left(a^2+\rho^2\right)\right)^2}$$

в следующую таблицу: $f(k,a)$

a \ k	0,5	0,658	0,08
0,1	5,47	7,85	8,01
0,208	8,60	8,77	8,68
0,3	8,48	8,28	7,95

Заключаем, что чувствительность КПД к отступлению от оптимальных параметров для параметра a выше, чем для параметра k.

3.8. Расчет механизма отражения гильзы

Одним из наиболее сложных при "точном" решении задачи может быть механизм отражения стреляной гильзы. Действительно, сначала гильза краем фланца ударяется в отражатель. Затем противоположным краем фланца – в выбрасыватель. Выбрасыватель через свою ось ударяется в затвор, затвор – в раму затвора. Эта последовательность ударов может многократно повторяться.

Если имеется специальная программа для расчета удара многомассовых систем, описанная выше, многократно повторяемая последовательность ударов не представляет серьезного вычислительного труда. Но и большого смысла в этом "точном" решении нет в силу крайней неопределенности коэффициента восстановления скорости при каждом последующем ударе. Поэтому следует упрощать постановку задачи в каждом конкретном случае расчета, то есть дополнять возможности вычислительной техники здравым человеческим смыслом. При этом следует иметь в виду, что "здравый человеческий смысл" может иногда, при недостаточной компетенции исполнителя, привести к ошибочным результатам.

В рассматриваемом случае имеет смысл считать систему рама затвора – затвор – выбрасыватель единым телом (рис.10).

Итак, энергия системы затвора и гильзы запишется соответственно (скорость гильзы до удара равна скорости затвора V_3):

$$2T = m_3 + mV_3^2 + m_2\left(\rho^2 + l^2\right)\omega^2, \qquad (3.8.1)$$

где m_3 – суммарная масса затвора с выбрасывателем и рамы затвора;

V_3 – их линейная скорость;

m_2 – масса гильзы;

ρ – радиус инерции гильзы;

ω – угловая скорость гильзы после удара;

l – расстояние от кромки фланца до центра масс гильзы:

$$l=\sqrt{l_1^2+R^2},$$

где l_1 – расстояние от торца гильзы до центра масс;

R – радиус гильзы перед фланцем.

Здесь мы пренебрегли угловой скоростью затвора, на что нам дают право результаты пункта 3.6 о соударении двух кубов. Следовательно, скорость затвора во всех точках равна, и тогда $V_{зА} = V_з$, а скорость затвора связана со скоростью гильзы в точке А на фланце и выразится:

$$\left.\begin{aligned} V_A &= V_3 - 2R\omega; \\ \Delta V_A &= \Delta V_3 - 2R\Delta\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (3.8.2)$$

Подставив выражения (3.8.2) в формулу (3.8.1) и продифференцировав уравнение энергии по обобщенным координатам V_A и ω, получим уравнения движения:

$$2T = (m_2+m_3)(V_A+2R\omega)^2 + m_2(\rho_2+l^2)\omega^2;$$

$$\Delta\frac{\partial T}{\partial V_A} = (m_2+m_3)\Delta(V_A+2R\omega) = P;$$

$$\Delta\frac{\partial T}{\partial \omega} = 2R(m_2+m_3)\Delta(V_A+2R\omega) + m_2(\rho^2+l^2)\omega^2 = 0;$$

$$\Delta\omega = \omega;$$

$$\omega = -\frac{2R(m_2+m_3)\Delta V_A}{4R^2m_3+(4R^2+\rho^2+l^2)m_2}, \quad \left(\approx\frac{\Delta V_A}{2R}\right)$$

Если предположить массу автомата достаточно большой по сравнению с массой гильзы, то можно считать, что гильза ударяется в неподвижный отражатель, и тогда для скорости точки А имеем жесткий удар:

$$\Delta V_A = -(1+\beta)V_0,$$

где V_0 – скорость гильзы перед ударом в отражатель.

Далее получим:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{2R(1+\beta)(m_2+m_3)V_0}{4R^2 m_3 + (4R^2+\rho^2+l^2)m_2} \\ V_3 &= V_A + 2R\omega = (2R\omega - \beta V_0). \end{aligned}\right\} \qquad (3.8.3)$$

Скорость центра масс гильзы определится как векторная сумма скорости V_A и ωl:

$$\overline{V}_2 = \overline{V}_A + \overline{\omega}\, l. \qquad (3.8.4)$$

На рис.10 показана траектория гильзы автомата Калашникова при отражении.

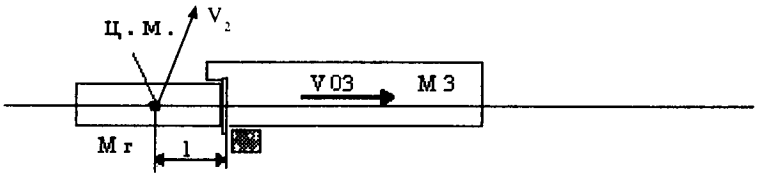


Рис 10. Отражение гильзы

3.9. Замечания к общему случаю соударения двух тел

Если имеется некоторая ортогональная система координат O_{xyz}, точка O которой находится в центре масс тела и в которой определены моменты инерции какого-либо из соударяющихся тел J_x, J_y, J_z и центробежные моменты J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}, то выражение для кинетической энергии записывается:

$$2T = mV_c^2 + J_x\omega_x^2 + J_y^2\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 + J_{xy}\omega_x\omega_y + \\ + J_{xz}\omega_x\omega_z + J_{yz}\omega_y\omega_z, \tag{3.9.1}$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – составляющие угловой скорости по осям координат.

Сделаем еще существенное замечание относительно выбора исходной системы координат O_{xyz}, при котором имеет смысл учитывать некоторую особенность реальных конструкций.

Дело в том, что конструктор стремится любую деталь спроектировать из простых объемов: параллелепипедов, пирамид, цилиндров, конусов, торов и т.д.

Этим в дальнейшем обеспечивается максимальная технологичность изготовления детали. Упрощается и процесс конструирования, поскольку оказывается возможным пользоваться только линейкой и циркулем или соответствующими элементами на экране дисплея. Привлекаемые к конструированию простейшие объемы имеют плоскости, а часто и оси симметрии. Эти плоскости и оси симметрии конструктор располагает на чертежи вдоль плоскостей проекций, что также упрощает вычерчивание детали. Таким образом, задается некоторая связанная система ортогональных координат, оси которой совпадают по направлению с линиями пересечения плоскостей проекций. Будем помещать начало координат этой системы в центр масс детали, саму эту систему называть естественной.

В естественной системе координат достаточно просто определяются моменты инерции. Элементарные объемы (в том числе вычитаемые) имеют табличные значения главных моментов и радиусов инерции. Поэтому общие моменты инерции могут быть подсчитаны по формулам:

$$J_{ii} = \sum_1^n m_k\left(\rho_k^2 + a_k^2\right), \quad J_{ij} = \sum_1^n m_k a_k b_k,$$

где m_k – масса элементарного объема,

ρ_k – его радиус инерции относительно центра масс,

a_k – расстояние от центра масс до i-ой оси,

b_k – расстояние от центра масс до j-ой оси.

Пусть в пространстве координат O_{xyz} тем или иным образом задана линия удара. Построим плоскость, проходящую через линию удара и центр масс тела. Это будет плоскость удара. В плоскости удара проведем ось O_ζ, параллельную линии удара, и ось O_ξ, перпендикулярную ей. Из точки O построим ось O_η, перпендикулярную плоскости удара. Косинусы углов между ортогональными системами координат O_{xyz} и $O_{\zeta\xi\eta}$ удобно выразить через так называемые углы Эйлера, которые определяются следующим образом (рис.11).

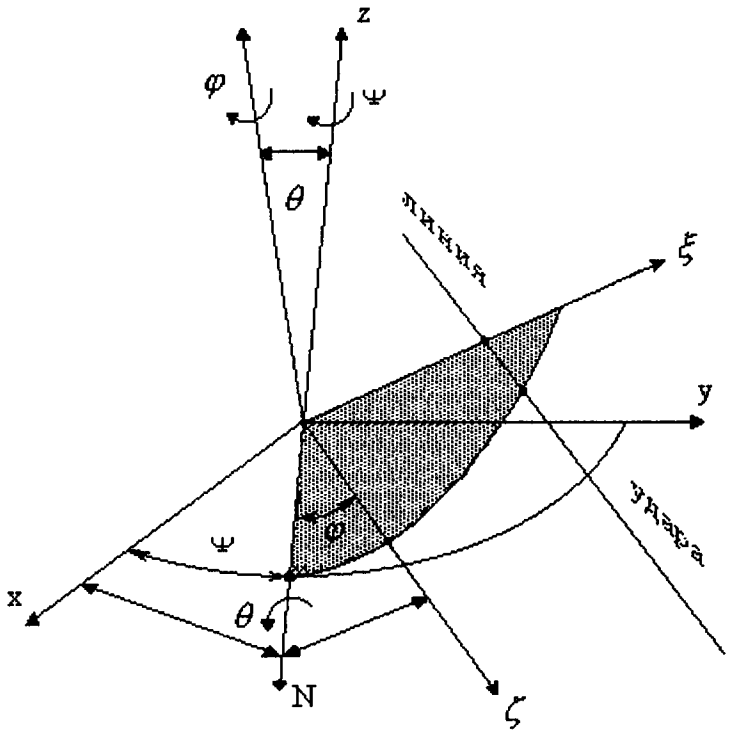


Рис 11. Углы Эйлера

Проведем линию ON пересечения плоскости удара $O_{\zeta\xi\eta}$ с плоскостью O_{xy}. Повернем систему координат вокруг оси O_η на угол φ до совпадения оси O_ζ с линией ON. Далее повернем эту же систему относительно линии ON на угол θ до совпадения плоскости O_{xy} с плоскостью удара. Ось O_z совпадает с осью O_η. Повернем систему координат относительно оси O_η на угол ψ до совпадения оси O_x с осью O_ζ. Система углов φ, θ, ψ и является углами Эйлера.

Косинусы углов между системами координат O_{xyz} и $O_{\zeta\xi\eta}$ выражаются через углы Эйлера следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(x,\zeta)=\alpha_1=\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
&\cos(x,\xi)=\alpha_2=\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
&\cos(x,\eta)=\alpha_3=\sin\psi\sin\theta,\\
&\cos(y,\zeta)=\beta_1=\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
&\cos(y,\xi)=\beta_2=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
&\cos(y,\eta)=\beta_3=-\cos\psi\sin\theta,\\
&\cos(z,\zeta)=\gamma_1=\sin\varphi\sin\theta,\\
&\cos(z,\xi)=\gamma_2=\cos\varphi\sin\theta,\\
&\cos(z,\eta)=\gamma_3=\cos\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.9.2)$$

Выпишем кинематические уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi,\\
\omega_\zeta &= \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi,\\
\omega_y &= \dot{\theta}\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi,\\
\omega_\xi &= -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi,\\
\omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta,\\
\omega_\eta &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.9.3)$$

Направляющие, по которым движутся тела, как правило, параллельны плоскостям системы координат O_{xyz}, что определяет направление их начальных скоростей. В оружии наиболее распространен случай, когда векторы линейной и угловой скоростей тела до удара направлены вдоль оси O_x, так что $V_{xo}=V_o$, $V_{yo}=V_{zo}=0$, $\omega_{0x}=\omega_0, \omega_{y0}=\omega_{z0}=0$. Именно такой случай мы будем рассматривать в дальнейшем, что не нарушает общности результатов исследования.

Разложим вектор V_0 по осям связанной системы координат $0_{\eta\zeta\xi}$:

$$\left.\begin{aligned}
V_{\zeta_0} &= V_0\alpha_1,\\
V_{\xi_0} &= V_0\alpha_2,\\
V_{\eta_0} &= V_0\alpha_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.9.4)$$

Если не учитывать трение при ударе, то изменению в процессе удара подлежит только составляющая скорости $V_\zeta = V_c\alpha_1$.

Сама же скорость V_ζ связана со скоростью V_A по линии удара соотношением

$$V_A = V_\xi - \omega_\eta a, \tag{3.9.5}$$

где a – расстояние между линией удара и осью O_ξ.

С учетом равенств (3.9.2), (3.9.3), (3.9.4), (3.9.5) выражение для кинетической энергии тела, опуская неизменяющиеся слагаемые (3.9.1), перепишется:

$$\begin{aligned}
2T = {} & m\left(V_A + \left(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta\right)a\right)^2 + J_x\left(\dot\theta\cos\psi + \dot\psi\sin\theta\sin\psi\right)^2 + \\
& + J_y\left(\dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi\right)^2 + J_z\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + \\
& + J_{xy}\left(\dot\theta\cos\psi + \dot\psi\sin\theta\sin\psi\right)\left(\dot\theta\sin\psi - \dot\psi\sin\theta\cos\psi\right) + \\
& + J_{xz}\left(\dot\theta\cos\psi + \dot\psi\sin\theta\sin\psi\right)\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right) + \\
& + J_{yz}\left(\dot\theta\sin\psi - \dot\psi\sin\theta\cos\psi\right)\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right).
\end{aligned} \tag{3.9.6}$$

Принимая за обобщенные скорости величины $V_A, \dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi$, подставляя выражения (3.9.6) в (3.9.1), получим четыре уравнения с пятью неизвестными (пятое – импульс P) для каждого тела, присовокупляя сюда выражение для коэффициента восстановления скорости (2.2.1), получим замкнутую систему уравнений для применения обобщенных скоростей в процессе удара. Система не представляет собой вычислительных трудностей для современной вычислительной техники, но даже при сделанных упрощениях достаточно пригодна для аналитических выкладок. Поэтому исследуем ее в некоторых частных случаях.

Пусть плоскость удара совпадает с плоскостью O_{xy} , то есть $\theta = 0$. В этом случае угол ψ становится неопределенным и его можно принять любым значением, в том числе равным нулю вместе с его производной. Пусть также линия удара параллельна оси O_x , то есть $\varphi = 0$. Уравнение для кинетической энергии при этих условиях перепишется в виде

$$2T = m\left(V_A + a\dot{\varphi}\right)^2 + J_x\dot{\theta}^2 + J_z\dot{\varphi}^2 + J_{xy}\dot{\theta}\dot{\varphi}\ .$$

Уравнения движения *b* запишутся:

$$\Delta\frac{\partial T}{\partial V_A} = m\Delta\left(V_A + a\dot{\varphi}\right) = P,$$

$$\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ma\Delta\left(V_A + a\dot{\varphi}\right) + J_x\dot{\varphi} + J_{xy}\dot{\theta} + \varphi = 0,$$

$$\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_x\dot{\theta} + J_{xz}\dot{\varphi} = 0.$$

Поскольку $\dot{\varphi} \neq 0$, то из последнего уравнения следует, что $\dot{\theta} = 0$ только в том случае, если $J_{xy} = 0$. То есть для того, чтобы удар действительно был плоским, недостаточно, чтобы плоскость удара совпадала с плоскостью O_{xy} (или любой другой из координатных плоскостей неподвижной системы), необходимо еще, чтобы плоскость удара была плоскостью симметрии тела.

Однако в реальных деталях это далеко не так. Если взять раму затвора автомата Калашникова, можно убедиться, что она не имеет ни осей, ни плоскостей симметрии. Поэтому все предыдущее исследование плоского удара носит скорее иллюстративный характер, демонстрирующий некоторые закономерности удара, чем реальное руководство к расчетам.

Рассмотрим упрощенный вариант удара в начале открывания затвора типа винтовки М16. Упрощения будут касаться того, что мы будем считать затвор цилиндром радиуса R и длиной $l_2 = 24R$ и не учитывать влияние на массу и моменты инерции боевых упоров и ведущих стержня и ролика. Раму затвора также будем считать полым цилиндром с радиусами R и $2R$ и длиной $l_1 = 20R$, пренебрегая при этом различными вырезами, в том числе фигурным пазом для ведущих ролика. Впрочем, все эти допущения нетрудно устранить при желании иметь более точный расчет.

Обозначим массу рамы затвора через m_1, тогда, если все детали сделаны из одного материала, масса затвора при назначенных соотношениях размеров будет равна $m_2 = 0{,}4m_1$. Массу короба примем $m_3 = 6m_1$.

Пусть точка O системы координат O_{xyz} расположена в центре масс рамы (рис.12). Линия удара проходит горизонтально на расстоянии $a = 1{,}5R$ от плоскости O_{xy} и составляет с осью O_x угол 45°. Пусть также точка A расположена на оси O_y.

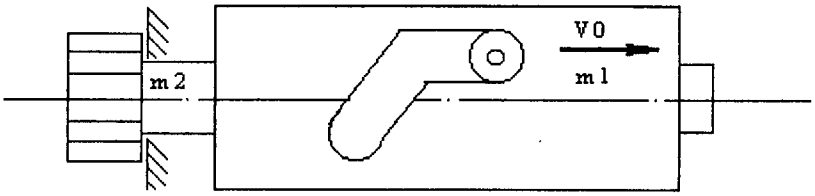


Рис 12. Затвор М-16

Таким образом, для рамы имеем:

$$\psi = 45°,\ \theta = 90°,\ \varphi = 0°.$$

При этих значениях вычисляем с учетом кинематических уравнений Эйлера (3.9.3):

$$V_\zeta = V_x \cos\psi = V_x \frac{\sqrt{2}}{2},\ V_\xi = V_x \frac{\sqrt{2}}{2},\ V_\eta = 0,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\theta},\ \omega_\xi = \dot{\psi},\ \omega_\eta = \dot{\varphi},\ V_\zeta = V_A - a\dot{\varphi},$$

$$\omega_x = \left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\frac{\sqrt{2}}{2},\ \omega_y = \left(\dot{\theta} - \dot{\varphi}\right)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\rho_{x1}^2 = 0{,}5\left(R_1^2 + R_2^2\right) = 2{,}5R^2,$$

$$\rho_{y1}^2 = \rho_z^2 = \frac{1}{12}\left(l_1^2 + 3R_1^2 + 3R_2^2\right) = 34{,}58R^2.$$

Уравнение энергии запишется как

$$2T = m_1\left(2\left(V_{A_1} - a\dot{\varphi}_1\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_x^2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_1\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_{y_1}^2\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\varphi}_1\right)^2 + \rho_{z1}\dot{\psi}_1^2\right).$$

Запишем уравнение движения:

$$2m_1\Delta\left(V_{Ai} - a\dot{\varphi}_1\right) = P\ ,\rho_z\dot{\psi} = 0\ ,$$
$$\rho_{x1}^2\left(\dot{\theta}_1 - a\dot{\varphi}_1\right) + \rho_{y1}^2\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\varphi}_1\right) = 0\ ,$$
$$-2a\Delta\left(V_{A1} + a\dot{\varphi}_1\right) + \frac{1}{2}\rho_{x1}^2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_1\right) - \frac{1}{2}\rho_{y1}^2\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\varphi}_1\right) = 0.$$

Из второго уравнения следует: $\dot{\psi}_1 = 0$.

Из третьего:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\rho_{y1}^2 - \rho_{x1}^2}{\rho_{y1}^2 + \rho_{xx1}^2}\dot{\varphi}_1 = 0{,}865\dot{\varphi}_1$$

Но тогда

$$\rho_{x1}^2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}_1\right) + \rho_{y1}^2\left(\dot{\theta}\ - \dot{\varphi}\ \right) = \frac{4\rho_{x1}^2\rho_{y1}^2}{\rho_{x1}^2 + \rho_{y1}^2}\dot{\varphi}_1 = 9{,}36R^2\dot{\varphi}_1.$$

Из четвертого уравнения:

$$\varphi_1 = \frac{a\Delta V_{A1}}{a^2 + 2{,}331R^2} = 0{,}327\frac{\Delta V_n}{R}.$$

И, наконец, из первого уравнения:

$$m_{np1}\Delta V_{A1} = P,$$

где $$m_{np1}=2\left(1-0{,}327\frac{a}{R}\right)m_1=1{,}019m_1.$$

Рассмотрим систему короб – затвор.

Речь идет именно о системе, поскольку затвор в момент удара плотно зажат между донцем гильзы и упорами ствольной коробки. Следовательно, в момент удара короб и затвор перемещаются в линейных направлениях как одно целое. В то же время, если не учитывать трение, в повороте относительно оси O_x участвует только затвор.

Таким образом, уравнение для кинетической энергии относительно системы короб – затвор запишется как

$$2T=\left(m_2+m_3\right)V_{c2}^2+J_{x2}\omega_{x2}^2+J_{y2}\omega_{y2}^2+J_{z2}\omega_{z2}^2,$$

где J_{x2} – момент инерции затвора относительно оси O_x;

J_{y2} ,J_{z2} – моменты инерции короба с затвором относительно соответствующих осей.

Заметим, что формально оно не отличается от уравнения энергии для затвора. Если еще принять, что центр масс системы совпадает с центром масс рамы затвора, то решение формально также не будет отличаться от решения для последнего.

То есть имеем, если учесть, что $J_y >> J_x$:

$$\dot{\theta}=\frac{J_x-J_y}{J_y+J_x}\dot{\varphi},$$

$$\dot{\psi}=0,$$

$$\left(J_x\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)-J_y\left(\dot{\theta}-\dot{\varphi}\right)\right)=\frac{4J_xJ_y}{J_xJ_y}\dot{\varphi}\approx 4J_x\dot{\varphi}.$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений

$$2\left(m_2+m_3\right)\Delta\left(V_{A2}-a\dot{\varphi}\right)=P,$$

$$-a\left(m_2+m_3\right)\Delta\left(V_{A2}-a\dot{\varphi}\right)+\rho_x^2m_2\dot{\varphi}=0.$$

Откуда

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{a(m_2+m_3)\Delta V_{A2}}{a^2(m_2+m_3)+\rho_{x2}^2 m_2} = 0{,}65753\frac{V_{A2}}{R},$$

$$m_{np2}\Delta V_{A2} = P,$$

где $$m_{np2} = \frac{2(m_2+m_3)\rho_{x2}^2 m_2}{a^2(m_2+m_3)+\rho_{x2}^2 m_2} = 0{,}175 m_1.$$

Запишем уравнения сохранения количества движения:

$$m_{np1}\Delta V_{A1} = m_{np2}\Delta V_{A2}$$

Присовокупим к нему формулу для коэффициента восстановления скорости

$$\Delta V_{A1} + \Delta V_{A2} = (1+\beta)V_{A0}.$$

Поскольку паз рамы затвора накладывает двустороннюю связь на ролик затвора, нужно принять $\beta = 0$. Тогда

$$\Delta V_{a1} + \Delta V_{A2} = \frac{m_{np1}}{m_{np1}+m_{np2}}V_{A0} = 0{,}853 V_{A0},$$

$$\Delta V_{A1} = 0{,}147 V_{A0}.$$

Окончательно вычислим:

$$V_{x1} = \frac{V_{\eta 1}}{\cos\psi} = \sqrt{2}\left(\Delta V_{A1} - a\varphi_1\right) = 0{,}140 V_0,$$

$$V_{x2} = \frac{V_{\eta 2}}{\cos\psi} = \sqrt{2}\left(\Delta V_{A2} - a\varphi_2\right) = 0{,}0147 V_0,$$

$$\varphi_1 = 0{,}068\frac{V_0}{R}, \varphi_2 = 0{,}793\frac{V_0}{R},$$

$$\theta_1 = 0{,}058\frac{V_0}{R}, \theta_2 = \varphi_2,$$

$$\omega_{x1} = 0{,}126\frac{V_0}{R}, \omega_{x2} = 1{,}793\frac{V_0}{R}.$$

Величина ω_{x2} служит начальным условием для расчета открывания затвора. Остальные составляющие угловых скоростей гасятся при ударах о направляющие. Заметим, что скорость рамы затвора падает на 14 %, следовательно, ее энергия теряется на 28 %.

4. ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ВЕЛИЧИНУ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Мы указывали, что на коэффициент восстановления влияет множество факторов, проследить которые в общем виде не удается. Однако понятие о некоторых из них можно получить, исследуя деформации стержней при их продольном соударении. Информация, полученная при этом, может оказаться полезной при конструировании конкретных деталей.

4.1. Уравнение для продольных колебаний стержня

Рассмотрим движение элемента стержня длиной dx (рис.13) под действием сил упругости:

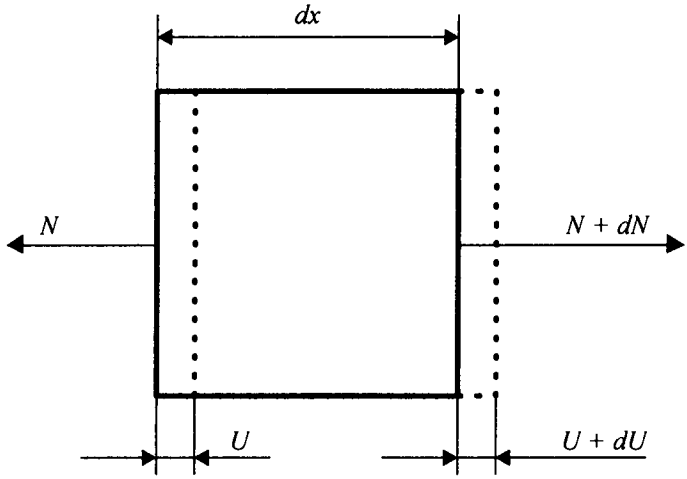


Рис. 13. Элемент стержня под действием сил упругости

$$\left(N+dN\right)-N=\rho\ S\frac{\partial^2 u}{\partial\ t^2}dx,$$

где N – продольная сила;

S – площадь сечения;

ρ – плотность материала стержня;

u – смещение сечения.

После сокращения формула приводится к виду

$$\frac{dN}{dx}=S\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\ t^2}.$$

Но $N = S\sigma$, где σ – напряжение в сечении, и далее $\sigma = E\dfrac{\partial u}{\partial x}$, следовательно, окончательно можем записать:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{4.1.1}$$

где $a = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ – скорость распространения звука в материале.

Уравнение (4.1.1) описывает продольные колебания в стержне постоянного сечения. В общем виде решение его может быть записано как

$$u = f(at - x) + \varphi(at + x), \tag{4.1.2}$$

где $f(z)$ и $\varphi(z)$ – произвольные функции, значения которых должны быть определены из начальных и граничных условий.

Функция $f(z)$ сохраняет постоянное значение вдоль характеристики $at - x = \text{const}$. Функция $\varphi(z)$ – вдоль характеристики $at + x = \text{const}$. Это значит, что процесс колебаний стержня можно рассматривать как наложение двух волн постоянной конфигурации, движущихся в противоположном направлении со скоростью a.

4.2. Удар стержня о жесткую плиту

Пусть стержень длиной l ударяется со скоростью V_0 о жесткую плиту (рис.14). Нужно заметить, что абсолютно жестких плит не бывает, и их податливость может оказать существенное влияние на измеряемое значение коэффициента восстановления. Чтобы убедиться в этом, бросьте теннисный шарик на табурет, покрытый трехмиллиметровой фанерой. Шарик практически не отскочит. Хотя жесткость и масса фанеры во

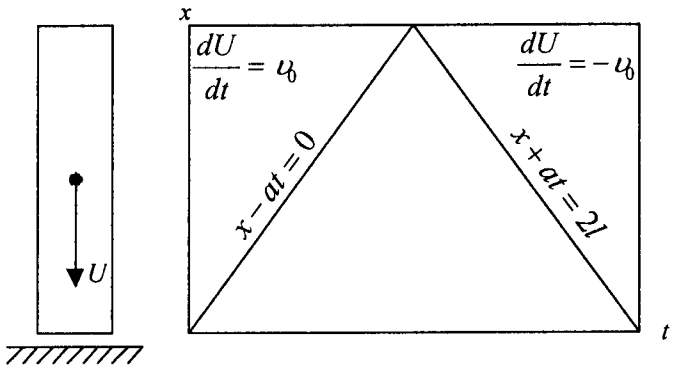


Рис. 14. Схема распространения волн сжатия и отражения при ударе стержня о плиту

много раз больше, чем жесткость и масса шарика. Чтобы шарик должным образом отскакивал, нужна прессованная фанера толщиной 10...15 мм или дюймовая доска.

Впрочем, если направить два одинаковых стержня навстречу друг другу с одинаковой скоростью, это будет имитировать жесткую стенку. Начальные условия для этого случая запишем:

$$\text{при } t=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-V_0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{4.2.1}$$

Граничные условия запишутся:

$$\text{при } x=0 \qquad u=0\ (\text{при } \frac{\partial u}{\partial x}<0), \tag{4.2.2}$$

$$\text{при } x=1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{4.2.3}$$

По поводу условия (4.2.2) заметим, что при неудерживающей связи, которая имеет место в данном случае, не может быть

$\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ при $x = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $x = 0$ означает конец удара.

Условие (4.2.2) приводит к соотношению

$$f(at) = -\varphi(at).$$

При этом время t может принимать любые значения. Обозначив $at = z$, можем переписать предыдущее равенство:

$$f(z) = -\varphi(z),$$

где z – соответствующий каждой функции аргумент.

Следовательно, можем записать:

$$u = f(at - x) - f(at + x).$$

Используя условие (4.2.2), получим:

$$-f'(at - l) - f'(at + l) = 0, \qquad (4.2.4)$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу. На этом же основании, что z может принимать любые значения,

$$f'(z) = -f'(z - 2l).$$

Откуда заключаем, что функция $f'(z)$ является периодической с периодом $4l$.

Начальные условия (4.2.1) приводят к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a\left[f'(-x) - f'(x)\right] &= -V_0; \\ f'(-x) &= -f'(x). \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.5)$$

Поскольку x также может принимать любые значения от 0 до l, то последнее равенство означает, что функция должна быть симметричной относительно точки $z = 0$.

Решая систему (4.2.5) и обозначив в данном случае $z = x$, получим:

$$f'(z)=\frac{V_0}{2a}. \tag{4.2.6}$$

Используя обнаруженные ранее свойства симметричности и периодичности, можем приступить к построению функции:

$$\left.\begin{aligned} -2l<z<0, f'(z)=-\frac{V_0}{2a};\\ 0<z<2l, f'(z)=\frac{V_0}{2a}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2.7}$$

При необходимости построение может быть продолжено за выписанные пределы. Используя (4.2.6), получим решение для всего периода удара. В результате удара в стержне возникает волна сжатия, которая движется со скоростью a в сторону положительных x .

В момент времени $t_1<\dfrac{l}{a}$ она достигнет сечения $x_1 = at_1$ (рис. 14).

При $x < x_1$ имеем:

$$z_1=at-x>0,\quad f'(z)=-\frac{V_0}{2a};$$

$$z_2=at+x-2l<0,\quad f'(z)=-\frac{V_0}{2a},$$

и тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{V_0}{a},\quad \sigma=E\frac{\partial u}{\partial x}=-\sqrt{\rho E}V_0.$$

При $x > x_1$ имеем:

$$z_1 = at_1 - x > 0, \quad f'(z) = -\frac{V_0}{2a};$$

$$z_2 = at_1 + x - 2l < 0, \quad f'(z) = -\frac{V_0}{2a},$$

и тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = -V_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Сечения выше еще "не знают", что произошел удар и продолжают двигаться с прежней скоростью.

При достижении волной сжатия свободного торца она отразится от него, и обратная волна будет двигаться со скоростью a в сторону уменьшения x. В момент t_2, такой, что $at_2 > 0$, волна достигнет сечения $x_2 = 2l - at_2$. Параметры волны в сечениях $x > x_1$ определяются из соотношений:

$$z_1 = at_2 - x > 0, \quad f'(z) = -\frac{V_0}{2a};$$

$$z_2 = at_2 + x - 2l < 0, \quad f'(z) = -\frac{V_0}{2a},$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial x} = V_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

При $t = \frac{2l}{a}$ эта волна достигнет сечения $x = 0$, и при неудерживающей связи стержень отскочит от плиты со скоростью V_0, что согласуется с расчетом по формулам (2.3.2) при $\beta = 1$.

Интересно вычислить время соударения стержня с плитой. В общем виде оно выразится формулой $\tau = \frac{2l}{a}$.

Скорость распространения волны в стальном стержне

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=\sqrt{\frac{2*10^{11}}{8*10^{3}}}=5000\ м/с.$$

Таким образом, для стержня длиной 2 см, что соответствует радиусу шара $R=1$ см из (1.1), получим:

$$\tau=\frac{2*2*10^{-2}}{5000}=0{,}8*10^{-5}c,$$

то есть время соударения шара в четыре раза больше, чем время соударения стержня с плоским торцем. Заключаем, что время соударения в существенной степени зависит от жесткости в области контакта.

4.3. Учет демпфирования при ударе по стержню

Предположим далее, что при деформации стержня в нем возникают силы, препятствующие этой деформации. Рассмотрим частный случай таких сил, а именно предположим, что в материале стержня действуют силы кулонова трения: при изменении скорости деформации от нуля до некоторого значения возникают силы трения, характеризуемые напряжением трения $\sigma_{тр}$ так, что сжимающая сила выразится как

$$N=ES\frac{\partial u}{\partial x}\pm S\sigma_{тр},$$

причем знак в этой формуле совпадает со знаком скорости деформации. Поскольку предполагается, что $\sigma_{тр}=const$, то процесс будет описываться тем же уравнением (4.1.2), но с той лишь разницей, что при изменении деформации из состояния первоначального покоя до некото-

рой величины сила N делает скачок на величину $S\sigma_{mp}$, при изменении знака скорости деформации – на величину $2S\sigma_{mp}$.

Согласно начальных условий (4.2.1), в области левее характеристики

$$at - x = 0,$$
$$f'(z) = -\frac{V_0}{2a},$$
$$\varphi'(z) = -\frac{V_0}{2a}.$$

При пересечении характеристики $at - x = 0$ функция $\varphi'(z)$ должна скачком меняться на величину $\frac{\sigma_{mp}}{E}$.

В области правее характеристики $at - x = l$ должно быть:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{V_0}{a} + \frac{\sigma_{mp}}{E}.$$

При пересечении характеристики $at + x = l$ функция $f'(z)$ в силу того, что на ней скорость деформации меняет знак на обратный, должна меняться на $-2\frac{\sigma_{mp}}{E}$, следовательно:

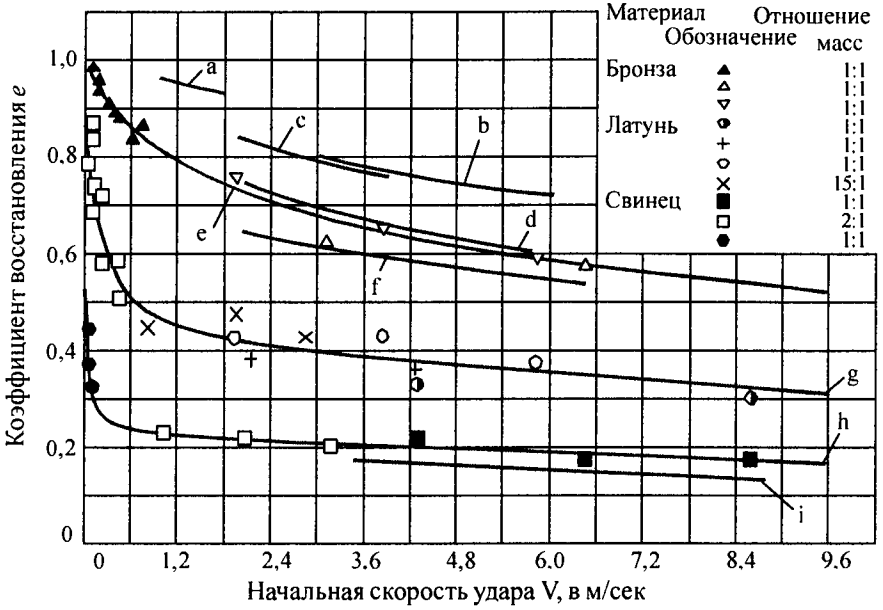


Рис 15. Диаграмма.
a – жесткая бронза; b – мрамор; c – алюминий; d – латунь; e – свинец

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\frac{\sigma_{mp}}{E},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_0 - 2\frac{\sigma_{mp}}{E}a.$$

Коэффициент восстановления для этого случая

$$B = 1 - 2\frac{\sigma_{mp}}{E}\frac{a}{V_0},$$

что показывает зависимость его также от скорости. Зависимость коэффициента восстановления от скорости подтверждается и опытами при соударении шаров из разного материала [4]. На рис.15 представлены результаты измерения коэффициента восстановления при соударении шаров, заимствованные из различных источников (отсюда различные обозначения для опытов из одного и того же материала).

4.4. Соударение стержней различной длины

Пусть два стержня одинакового сечения, но различной длины движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями V_0 (рис.16). В момент времени t_0 они сталкиваются. В силу симметрии их граница останавливается и в обоих стержнях начинается процесс, аналогичный описанному в предыдущем параграфе. Пусть $l_1 < l_2$, тогда процесс в первом стержне закончится раньше, в момент времени $t_1 = 2l_1/a$. Если $l_2 = 2l_1/a$, то к этому времени во втором стержне отраженная волна достигнет сечения $x = 2l_2 - at_1 = 2(l_2 - l_1)$. При $x > x_2$ скорость сечений будет равна V_0. При $x < x_2$ скорость равна нулю, но зато напряжение равно $\sqrt{\rho E V_0}$. Количество движения второго стержня:

$$m_2 \frac{l_2 - x_2}{l_2} V_0,$$

где $m_2 = \rho s l_2$ – масса второго стержня.

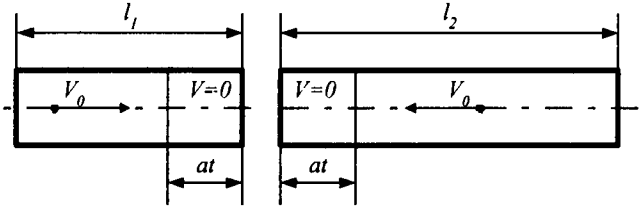


Рис 16. Схема соударения двух стержней одинакового сечения и различной длины

Средняя скорость, а следовательно, и скорость центра масс второго стержня после затухания колебаний:

$$V_2 = \frac{l_2 - x_2}{l_2} V_0 = \frac{2l_1 - l_2}{l_2} V_0.$$

Если $l_1 = l_2$, то $V_2 = V_0$, что соответствует расчетам по формуле (2.3.2). Если же $l_1 = 2l_2$ ($m_2 = 2m_1$), то стержни разминутся со скоростями центров масс $V_1 = V_0$; $V_2 = 0$, вместо $V_1 = -\frac{5}{3}V_0$ и $V_2 = \frac{1}{3}V_0$ по формулам (2.3.2). И потеря энергии будет равна $m_1 V_0^2$ (при начальной энергии стержней $\frac{3}{2} m_1 V_0^2$) вместо нулевой потери по формуле (2.4.1). Эта потерянная кинетическая энергия перешла в потенциальную энергию сжатия второго стержня, которая, в свою очередь, вызовет собственные колебания стержня. Последние будут рассеяны под влиянием демпфирующих факторов. Таким образом, коэффициент восстановления зависит не только от материала соударяющихся тел, как полагал Ньютон при выводе формул (2.3.1) и (2.4.1), но, в данном случае, и от соотношения размеров тел в направлении линии удара.

4.5. Удар ступенчатого стержня о жесткую стенку

Рассмотрим более сложный случай. Пусть ступенчатый стержень ударяется о жесткую стенку (рис.17). Для упрощения анализа примем длины ступеней равными. Площади поперечных сечений ступеней относятся как $\alpha = \frac{s_2}{s_1}$.

Поскольку уравнение (4.1.2) справедливо только для цилиндрических стержней, то необходимо записать решение для каждой ступени отдельно:

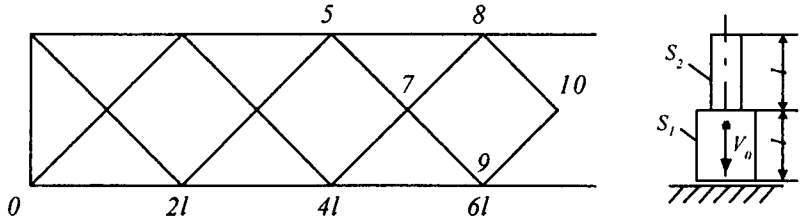


Рис 17. Диаграмма

$$u_1 = f_1(at-x)+\varphi_1(at+x),$$
$$u_2 = f_2(at-x)+\varphi_2(at+x). \qquad (4.5.1)$$

Имеем серию граничных условий:

при $x = 0$ $\quad u_1 = 0$

при $x = l$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t};$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = d\frac{\partial u_2}{\partial x};$$

при $x = 2l$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \qquad (4.5.2)$$

Начальное условие запишется как

при $t = 0$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = -V_0, \qquad (4.5.3)$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0.$$

Из граничных условий имеем:

$$\left.\begin{aligned} f_1(z) &= \varphi_1(z), \\ 2f_2'(z) &= \frac{2}{1+\alpha} f_1'(z) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\varphi_2'(z+2l), \\ 2f_1'(z) &= \frac{2\alpha}{1+\alpha}\varphi_2'(z) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} f_1'(z-2l), \\ \varphi_2'(z) &= f_2'(z-4l). \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.4)$$

Если известны $f_1'(z-2l)$ и $\varphi_2'(z+2l)$ при некотором значении z на границе ступеней, то формулы (4.4.4) позволяют последовательно построить решение для аргумента $z + 2l$.

Для получения исходных данных для расчета воспользуемся начальными условиями (4.4.3), получим:

$$\begin{aligned} a\left[f_1'(-x)+\varphi_1'(x)\right] &= -V_0, \\ a\left[f_2'(-x)+\varphi_2'(x)\right] &= -V_0, \\ -f_1'(-x)+\varphi_1'(x) &= 0, \\ -f_2'(-x)+\varphi_2'(x) &= 0. \end{aligned} \qquad (4.5.5)$$

Последние два равенства в сочетании с (4.5.1) показывают, что функции $f_i(z)$ (i = 1,2) симметричны относительно точки $z = 0$.

Из условия (4.5.2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} f_1'(z) &= f_2'(z) = -\frac{V_0}{2a}, \quad -2l < z < 0; \\ \varphi_1'(z) &= -\frac{V_0}{2a}, \quad 0 < z < 2l; \\ \varphi_2'(z) &= -\frac{V_0}{2a}, \quad 2l < z < 4l. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.6)$$

Интервал изменения z определяется интервалом на оси at, в котором пересекаются с этой осью характеристики $at - x$ = const и $at + x$ =const, проведенные из точки, в которой ищется решение. Так, для треугольника *2* на рис.17 характеристика $at - x$ = const проходит через интервал $0 < z < 2l$, а характеристика $at + x$ = const – через интервал $2l < z < 4l$. Имея условия (4.4.4) для пересечения границы между треугольниками *2* и *3*, можем записать на основании (4.5.6):

$$f_1'(z) = \frac{V_0}{2a}, 0 < z < 2l.$$

Далее, на основании условий (4.5.6):

$$2f_2'(0<z<2l) = \frac{2}{\alpha+1}\frac{V_0}{2\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha+1}\frac{V_0}{2\alpha} = \frac{3-\alpha}{1+\alpha}\frac{V_0}{2\alpha},$$

$$2\varphi_2'(2l<z<4l) = -\frac{2}{\alpha+1}\frac{V_0}{2\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha+1}\frac{V_0}{2\alpha} = \frac{1-3\alpha}{1+\alpha}\frac{V_0}{2\alpha}.$$

И на основании (4.5.6)

$$\varphi_2(4l<z<6l) = \frac{3-\alpha}{1+\alpha}.$$

Значения функций, характеризующие продольные колебания в стержне

$< Z <$	$f_1'(Z)$	$\varphi_1'(Z)$	$f_2'(Z)$	$\varphi_2'(Z)$
$-2l \quad 0$	-1	-1	-1	-1
$0 \quad 2l$	1	-1	$\frac{3-\alpha}{1+\alpha}$	-1
$2l \quad 4l$	$\frac{3\alpha-1}{1+\alpha}$	$\frac{1-3\alpha}{1+\alpha}$	$\frac{3-\alpha}{1+\alpha}$	-1
$4l \quad 6l$	$\frac{5\alpha^2-10\alpha+1}{(1+\alpha)^2}$	$\frac{-5\alpha^2+10\alpha-1}{(1+\alpha)^2}$	$\frac{-\alpha^2+10\alpha-5}{(1+\alpha)^2}$	$\frac{3-\alpha}{1+\alpha}$
$6l \quad 8l$		$\frac{-7\alpha^3+35\alpha^2-21\alpha+1}{(1+\alpha)^3}$	$\frac{-\alpha^3+21\alpha^2-25\alpha-3}{(1+\alpha)^3}$	$\frac{-\alpha^2+10\alpha-5}{(1+\alpha)^2}$
$8l \quad 10l$				$\frac{-\alpha^3+21\alpha^2-25\alpha-3}{(1+\alpha)^3}$

Продолжая подобным образом, заполним таблицу.

Имея таким образом построенные функции $f_i'(z)$ и $\varphi_i'(z)$, можем приступить к определению скоростей и деформаций в различных зонах диаграммы $x - at$.

Для треугольника *1*:

$f_1'(0<z<2l)$ – как и в таблице выписываем только коэффициенты при $\frac{V_0}{2\alpha}$, $\varphi_1'(0<z<2l)=-l$, и, следовательно, получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{V_0}{a}.$$

Для треугольника *5*:

$$f_1'(2l<z<4l)=\frac{3a-1}{\alpha+1},\ \varphi_1'(2l<z<4l)=\frac{1-3a}{1+a},$$

и, следовательно, имеем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{1-3a}{1+a}\cdot\frac{V_0}{a}.$$

При $\alpha\le\frac{1}{3}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ и, следовательно, в момент времени $t=\frac{l}{a}$ удар закончится. Скорость стержня, одинаковая по всей его длине, определится ее значением в треугольниках *2* и *3*. Например, в треугольнике *2* имеем:

$$V_1=\frac{\partial u_2}{\partial t}=\left[f_2'(0<z<2l)+\varphi_2'(2l<z<4l)\right]=$$

$$=\frac{V_0}{2}\left[\frac{3-\alpha}{1+\alpha}-1\right]=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}V_0.$$

Поскольку при ударе о жесткую стенку коэффициент восстановления $b=-\frac{V_1}{V_0}$, то имеем: $b=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(0<\alpha<\frac{1}{3}\right)$.

Продолжая подобным образом, построим график коэффициента восстановления (рис.18).

Из графика видно, что коэффициент восстановления во многом зависит от соотношения площадей сечения, то есть в конечном счете от формы стержня. Например, при $\alpha=\frac{1}{3}$, $b=0{,}5$; при $\alpha=3,\beta=1$. То есть, если в данном случае бросать один и тот же упругий стержень разными концами на жесткую стенку, то коэффициент восстановления меняется вдвое.

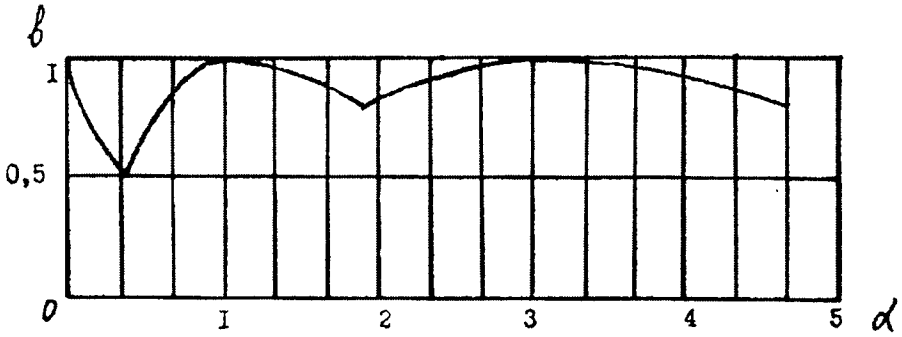


Рис. 18. Зависимость коэффициента восстановления от отношения площадей поперечных сечений отдельных ступеней

4.6. Учет местных деформаций при ударе стержней

Ударяющий конец стержня может быть не плоским, и тогда первоначальный контакт будет осуществляться по линии или в точке. Усилие на конце будет в общем случае выражаться формулой

$$p = ku^n, \tag{4.6.1}$$

где u – перемещение некоторой точки, достаточно удаленной от площади контакта;

k,n – постоянные, которые могут быть определены теоретически (для тел простейших форм) или экспериментально.

Вблизи ударяющего конца деформация в данном случае будет трехмерной или, в простейшем случае, двухмерная осесимметричная. Но в том и другом случае уравнение (4.5.2) уже не описывает процесс. Однако и уточненное описание оказывается достаточно сложным, не только не поддающимся аналитическому решению, но, при сегодняшнем состоянии вычислительной техники, и численному. Поэтому задачу приходится решать при дополнительных упрощениях.

Будем считать деформацию цилиндрической части стержня плоской, а местную деформацию, описываемую формулой (4.6.1), замыкающей-

ся в криволинейном торце. Другими словами, заменим криволинейный торец плоской прокладкой, имеющей нелинейную жесткость:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = nku^{n-1}. \tag{4.6.2}$$

При такой постановке задачи формула (4.6.1) обращается в граничное условие при $x = 0$. Следовательно, при граничном условии (4.5.2) можем записать:

$$\begin{aligned} &ES\left[-f'(at)+\varphi'(at)\right]=k\left[f(at+\varphi(at))\right]^n, \\ &\varphi'(at)=-f'(at-2l). \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Эти соотношения связывают между собой значения функций φ и f с интервалом отставания $2l$. Начальные значения должны определяться из условий (4.2.1). Уравнения (4.6.3) образуют нелинейную систему и могут быть решены численно. Однако для качественного анализа задачи достаточно рассмотреть случай, когда $n = 1$. Тогда, продифференцировав (4.6.3) по аргументу, можем записать:

$$f''(z)+\frac{k}{ES}f'(z)=f''(z-2l)-\frac{k}{ES}f'(z-2l).$$

Решение этого уравнения запишем как

$$\begin{aligned} f'(z) &= Ce^{-k_1 z} - e^{-k_1 z}\int_0^z \left[f''(z-2l)-k_1 f'(z-2l)\right]e^{k_1 z}dz = \\ &= Ce^{-k_1 z} + f'(z-2l) - 2k_1 e^{-k_1 z}\int_0^z e^{k_1 z} f'(z-2l)dz, \end{aligned} \tag{4.6.4}$$

где $k_1 = \frac{k}{ES}$, C – произвольная постоянная.

На основании начальных условий (4.2.1) имеем для t=0:

$$f'(z)=V_0.$$

Подставляя это значение в (4.5.4), получим для $0 < z < 2l$:

$$f'(z)=Ce^{-k_1 z}+\frac{V_0}{2a}.$$

Откуда имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=aCe^{-k_1 z},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-Ce^{-kz}-\frac{V_0}{a}.$$

Поскольку при Z=0 должно быть $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, то $C=-\frac{V_0}{a}$, и окончательно имеем для $0 < Z < 2l$, $f'(z)=-\frac{V_0}{a}\left(e^{-k_1 z}-0{,}5\right)$.

Далее, согласно формуле (4.6.4), можем вычислить для $2l < Z < 4$:

$$f'(z)=-\frac{V_0}{a}\left[e^{-k_1 z}+(l+2z)e^{-k_1(z-2l)}-0{,}5\right] \text{ и т.д.}$$

Для скоростей и деформаций имеем:
для $0 < Z < 2l$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-V_0 e^{-kz},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{V_0}{a}\left(1-e^{-k_1 z}\right),$$

для $0 < Z < 2l$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V_0 \left[e^{-k_1 z} + 2(l-z) e^{-k_1 (z-2l)} \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{V_0}{a} \left[e^{-k_1 z} - 2z e^{-k_1 (z-2l)} \right].$$

Замечаем, что при наличии контактной жесткости (так же, как и прокладки из любого материала) удар не заканчивается, как это было при ударе стержня с плоским торцем, в периоде $T=2l/a$, а напряжение не достигает своей предельной величины V_0/a. Другое дело, что снижение напряжения может быть незначительным.

При $2 < z < 4$ удар может закончиться, если оказывается, что

$$2l < at = 0{,}5 e^{2k_1 l} \le 4l .$$

Но в этом случае напряжение в стержне в целом отлично от нуля, то есть часть энергии будет сосредоточена в виде его потенциальной энергии, которая затем перейдет в его собственные колебания. Это значит, что криволинейная поверхность контакта смягчает удар, одновременно уменьшая коэффициент восстановления.

4.7. Удар жестким грузом по стержню

Пусть жесткое тело массой M ударяет по упругому стержню (рис. 19). В стержне при этом возникает колебательные процессы, описываемые решением уравнения (4.1.1). Задача состоит в соответствующем данному случаю определении вида функции $f(x)$ и $\varphi(z)$ из начальных и граничных условий.

Будем считать, что груз, соприкоснувшись со стержнем, движется совместно без отрыва с его верхним концом. Тогда сила инерции груза

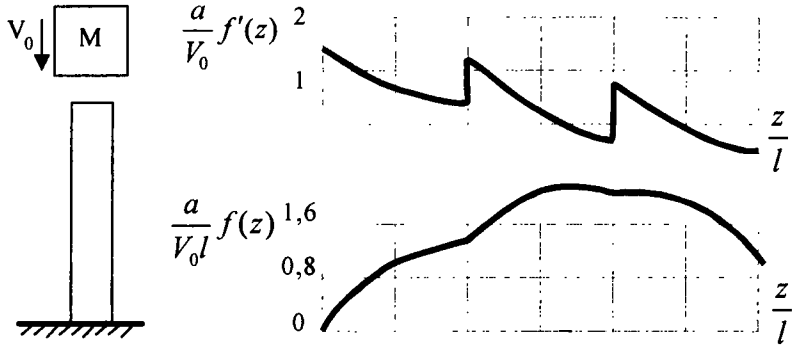


Рис. 19. Удар по упругому стержню

$M\left.\frac{d^2U}{dt^2}\right|_{x=0}$ гасится силой сопротивления стержня $EF\cdot\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}$. Здесь принято, что начало координат для описания динамических процессов в стержне находится в точке первоначального соприкосновения груза со стержнем.

Таким образом, уравнение движения груза имеет вид

$$M\frac{d^2U}{dt^2}=EF\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}.$$

Или, учитывая что $a^2=\frac{E}{\rho}$,

$$\frac{d^2U}{dt^2}=\alpha\frac{a^2}{e}\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}, \qquad (4.7.1)$$

где через α обозначено отношение массы стержня к массе груза $\alpha=\frac{\rho Fl}{M}$. С учетом граничного условия, что при $x=l$, где l – длина стержня, должно быть $U=0$, получим

$$f(at-l)+\varphi(at+l)=0.$$

Так как t при этом может принимать любые значения, то

$$\varphi(z)=-f(z-2l)$$

при произвольном значении $z=at\pm l$.

Подставляя последнее выражение в (4.2.4) получим

$$f''(z)+\frac{\alpha}{l}f'(z)=f''(z-2l)-\frac{\alpha}{l}f'(z-2l). \qquad (4.7.2)$$

Формула связывает значения функции $f(z)$ с ее значением, отстоящим по аргументу на расстояние $2l$, что и подтверждает колебательный характер процесса.

При $z<0$ стержень находится в спокойном состоянии. То есть правая часть в первом периоде колебаний равна нулю. В результате для первого полупериода колебаний имеем уравнение

$$f''(z)+\frac{\alpha}{l}f'(z)=0,$$

откуда

$$f'(z)=Ce^{-\alpha\frac{z}{l}}.$$

При z=0 (t=0, x=0) должно быть $f'(z)=V_0$, где V_0 – скорость груза до удара. И тогда $C=\frac{V_0}{a}$. Таким образом, при $0<z<2l$ функция $f'(z)$ определяется выражением

$$f'(z)=\frac{V_0}{a}e^{-\alpha\frac{z}{l}}. \qquad (4.7.3)$$

Для следующего периода колебаний будем иметь уравнение

$$f''(z)+\frac{\alpha}{l}f'(z)=-2\frac{V_0}{a}\frac{\alpha}{l}e^{-\frac{\alpha}{l}(z-2l)}.$$

Постоянная в решении этого уравнения определяется из условия, что при x=0 скорость груза не может меняться скачками, и тогда

$$f'(z)=\frac{V_0}{a}\left[e^{-\alpha\frac{z}{l}}+(1-2\alpha\frac{z-2l}{l}e^{-\alpha\frac{z-2l}{l}}\right].$$

Продолжая таким образом, можно проследить процесс до момента когда u=0, то есть стержень приобретет свою первоначальную длину и силовой контакт между грузом и стержнем нарушается.

Поскольку перемещения в стержне выражаются в нашем случае

$$u=f(z)-f(z-2l),$$

а напряжение

$$\delta=E\frac{dU}{dx}=f'(z)+f'(z-2l),$$

можем построить их графики (рис. 19).

Следует сказать, что в оружии в качестве основных деталей автоматики используется исключительно сталь. И ударяющий груз имеет соизмеримую со стержнем жесткость. Это в значительной мере сглаживает картину распределения напряжений. Но к удару жестким грузом по стержню можно свести задачу расчета удара грузом по пружине, если рассматривать пружину как стержень с соответствующей жесткостью, много меньшей, чем жесткость ударяющей по ней детали.

К расчету буферных пружин

Итак, будем рассматривать пружину как стержень, имеющий жесткость, отнесенную к единице длины

$$(EF)_{усл}=zl=\frac{4Cl}{\pi D^3 i},$$

где l – длина пружины в свободном состоянии;

$Д$ – средний диаметр навивки;

C – жесткость поперечного сечения витка;

i – число витков.

Например, для круглого сечения

$$C = \frac{\pi d^4}{32} G.$$

Для квадратного сечения

$$C = 0{,}141\, a^4 G,$$

где G – модуль сдвига;

d – диаметр проволоки;

a – сторона квадрата.

Масса единицы длины пружины

$$(\rho F)_{усл} = \frac{m}{l} = \frac{\rho F \cdot 2\pi Di}{l},$$

где m – общая масса пружины;

F – площадь поперечного сечения витка.

Таким образом, для скорости распространения ударной волны в пружине – эквивалентном стержне будем иметь

$$a = \sqrt{\frac{(EF)_{усл}}{(\rho F)_{усл}}} = \frac{l}{\pi D^2 i}\sqrt{\frac{2C}{\rho F}}.$$

Далее задачу можем решить тем же методом, что и в предыдущем параграфе. Но, как правило, отношение массы пружины к массе ударяющего груза мало, и приходится учитывать достаточно много периодов колебаний, при этом вычислительные сложности с каждым периодом нарастают. Поэтому мы прибегнем к другому способу решения уравнения, а именно разложению его в тригонометрический ряд

$$u = A \sin pt \cdot \sin \mu \frac{x}{l}.$$

Подставляя это выражение в уравнение, находим, что оно удовлетворяется, если

$$p = \frac{m}{l} a .$$

Подставляя в граничное условие, получим, что должно быть

$$\mu tg\mu = \alpha .$$

Это уравнение дает для μ бесконечное число решений μ_i, так что превращается в бесконечный тригонометрический ряд. Суммировать бесконечные ряды также сложно, поэтому будем искать приближенное решение для этого ряда. При этом учтем, что, как правило, масса пружины мала по сравнению с массой ударяющего груза, то есть $a << l$. Тогда можно записать для первого корня

$$\mu(\mu + \frac{1}{3}\mu^3) = \alpha .$$

Окончательно получим

$$\mu_1^2 = \frac{\alpha}{1 + 1/3\,\alpha}, \quad \mu_n = \pi(n-1) + \frac{\alpha}{\pi(n-1)}, n \neq 1.$$

Заметим, что второй член в μ_n угле при n=2 отличается от единицы на порядок больше, чем μ_1. Поэтому для дальнейших примем $\mu_n = \pi(n-1),\ n \neq 1$.

Окончательно запишем

$$U = \sum A_n \sin\frac{\mu_n a t}{l} \cdot \sin\mu_n \frac{x}{l} .$$

При x=l и t=0 должно быть $\frac{dU}{dt} = V_0$ тогда $V_0 = \frac{a}{l}\sum A_n \mu_n \sin\mu_n$.

Формула для A_n находится с помощью предельного перехода, который дает (при малости отличия μ_i от πn)

$$A = \frac{V_0 l}{a}\frac{\cos\mu}{\mu^2},\ A_n = \frac{2V_0 l}{a\mu^2},\ n \neq 1.$$

Таким образом, ряд распадается на два слагаемых

$$U = \frac{V_0 l}{a\mu_1^2} - \left(\cos\mu\sin\mu_1\frac{at}{l}\sin\mu_1\frac{x}{l} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-1)^2}\sin\rho_n t\cdot\sin\mu_n\frac{x}{l}\right)$$

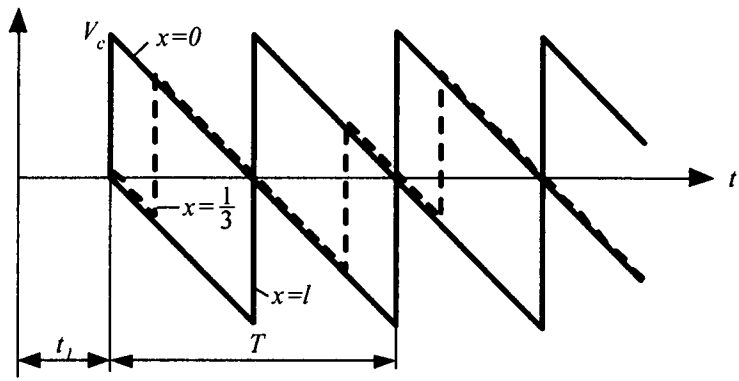


Рис. 20. Пилообразная функция

Бесконечный ряд представляет собой пилообразную функцию, график которой представлен на рис. 20.

Первый член в скобках представляет собой обычное энергетическое решение, которое после преобразования может быть заменено

$$p = Z\frac{dU}{dx} = Z\frac{V_0}{a}\frac{1+\frac{1}{3}\alpha}{\alpha}\sin p_1 t,\ x = 0;$$
$$p = Z\frac{V_0}{a}\frac{1-\frac{2}{3}\alpha}{\alpha}\sin p_1 t,\ x = l. \qquad (4.7.3)$$

Накладывая на это решение пилообразную функцию, получим решение в динамике. На рис. 21 представлено такое решение в сравнении с осциллограммой.

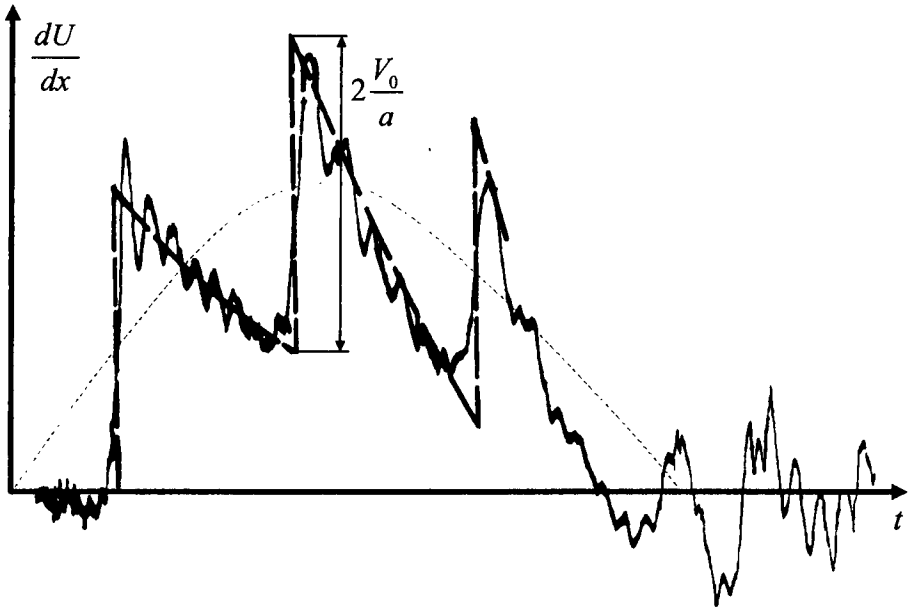


Рис. 21. Удар по пружине

Здесь следует иметь в виду два обстоятельства. Первое: если полученный график усилия с учетом собственных колебаний превзойдет статическое усилие при сжатии пружины до соприкосновения витков, то это свидетельствует о том, что витки будут соударяться. Соударение витков вызовет развитие контактных напряжений на поверхности соударения, образуя хорошо видимые плоские полосы. Кроме того, на границе перегиба фронта волны соударения возникают значительные изгибные напряжения. Все это отрицательно сказывается на прочности пружины. Но расчетных методов для этого случая не существует. И избежать соударений в большинстве случаев в оружии не удается.

Второе: при увеличении жесткости пружины, то есть отношение $\frac{d}{D}$, динамические составляющие существенно сглаживаются, вплоть до того, что их можно не учитывать.

Посчитаем потери энергии при ударе. При этом будем иметь в виду, что во многих случаях, особенно при конструировании буферов, имеется

промежуточное тело массой m_1. Тогда при ударе массы M по m_1 их общая скорость будет равна (считаем удар неупругим)

$$V_{01} = \frac{MV_0}{M + m_1}.$$

именно эту скорость и нужно учитывать при ударе.

Потери энергии при этом будут

$$\Delta Э_1 = \frac{Mm_1}{2(M + m_1)} V_0^2.$$

Далее нужно учесть потери на создание собственных колебаний пружины, выраженных пилообразной функцией. Учитывая ее периодичность, достаточно учесть энергию колебаний в первом полупериоде, когда $pt = \frac{\pi}{z}$, и $l \le z \le 0$. С учетом (4.7.3) имеем

$$\Delta Э_2 = \frac{мV_{01}^2}{2l} \int_l^0 e^{-2\alpha \frac{z}{l}} dz = \frac{mV_{01}^2}{4\alpha}(1 - e^{-2\alpha}).$$

Или, в предложении, что $\alpha \le 1$

$$\Delta Э_2 = \frac{mV_{01}^2}{2}(1 - \alpha + \ldots).$$

Эта энергия рассеивается в результате затухания колебаний.

Литература

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.Н. Курс теоретической механики. Ч. 1, 2. М., 1957.

2. Вернер Гольдсмит. Удар. М.,1965.

3. Александров Е.В., Соколинский В.Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем. М.: Наука, 1969. 199 с.

4. Батуев С.Г. и др. Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроение, 1973. 247 с.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

1. ВВЕДЕНИЕ 4
1.1. Термины и определения 4
1.2. О некоторых количественных соотношениях в процессе удара 5

2. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР 8
2.1. Прямой удар 8
2.2. Понятие о коэффициенте восстановления скорости 10
2.3. Прямой удар (продолжение) 12
2.4. Потери энергии при прямом ударе 13
2.5. Косой центральный удар 16
2.6. Повторный удар. Первый случай 17
2.7. Повторные удары. Второй случай 19

3. СОУДАРЕНИЯ МНОГОМАССОВЫХ СИСТЕМ 21
3.1. Последовательное соударение трех тел 22
3.2. Параллельное соударение трех тел 27
3.3. Уравнения Лагранжа второго рода для случая удара 30
3.4. Косой удар. Общий случай 31
3.5. Соударение шаров с учетом трения по площадке контакта 34
3.6. Внецентренный удар двух кубов 36
3.7. Ударный механизм с вращающимся курком 41
3.8. Расчет механизма отражения гильзы 46
3.9. Замечания к общему случаю соударения двух тел 48

4. ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ВЕЛИЧИНУ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ 59
4.1. Уравнение для продольных колебаний стержня 60
4.2. Удар стержня о жесткую плиту 61
4.3. Учет демпфирования при ударе по стержню 66
4.4. Соударение стержней различной длины 69
4.5. Удар ступенчатого стержня о жесткую стенку 70
4.6. Учет местных деформаций при ударе стержней 76
4.7. Удар жестким грузом по стержню 79
Литература 88

Алексей Афанасьевич Коновалов

УДАРЫ В ОРУЖИИ

В авторской редакции
Корректор Н.Н. Пирогова
Технический редактор С.И. Зянкина
Компьютерная верстка: А.Л. Кожевников

Лицензия ЛР №020411 от 16.02.97.
Сдано в производство 10.11.2000. Формат 60×80 $^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс. Уч. изд. л. 4,8. Усл. печ. л. 5,34. Заказ № 5007.
Тираж 1000 экз.

Издательский дом "Удмуртский университет",
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Республиканская типография,
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

Издательский дом "Удмуртский университет"
приглашает к сотрудничеству:

переводчиков, литераторов, авторов индивидуальных
и коллективных проектов, гуманитариев всех
профилей; ждем ваших рукописей,
издательских идей,
предложений
и т.д., и т.п.

С вашей помощью мы рассчитываем осуществить
поиск и дальнейшее издание новых занимательных
и познавательных книг различных направлений,
в том числе биографической, научно-популярной,
учебной литературы, беллетристики,
справочников, изданий по искусству
и т.д., представляющих
интерес для современного
читателя.

ПИШИТЕ, ЗВОНИТЕ, ЗАХОДИТЕ!

Наш адрес: 426034, Удмуртская Республика, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1.

Тел / факс: **(3412) 75-21-55**